



# Sur le spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique dans un domaine diédral

Nicolas Popoff

## ► To cite this version:

Nicolas Popoff. Sur le spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique dans un domaine diédral. Théorie spectrale [math.SP]. Université Rennes 1, 2012. Français. NNT: . tel-00746794v2

**HAL Id: tel-00746794**

**<https://theses.hal.science/tel-00746794v2>**

Submitted on 23 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et applications*

**Ecole doctorale MATISSE**

présentée par

**Nicolas Popoff**

préparée à l'UMR 6625 CNRS-IRMAR  
Institut de recherche Mathématique de Rennes  
U.F.R. de Mathématiques

**Sur le spectre de  
l'opérateur de  
Schrödinger magnétique  
dans un domaine diédral**

**Thèse soutenue à Rennes  
le 20 novembre 2012**

devant le jury composé de :

**Philippe BRIET**

Professeur, Université de Toulon / Rapporteur

**Johannes SJÖSTRAND**

Directeur de recherche CNRS / Rapporteur

**Florian MEHATS**

Professeur, Université de Rennes 1 / Examineur

**San VŨ NGOC**

Professeur, Université de Rennes 1 / Examineur

**Søren FOURNAIS**

Professeur, University of Aarhus / Examineur

**Didier ROBERT**

Professeur, Université de Nantes / Examineur

**Monique DAUGE**

Directeur de recherche CNRS / Directrice de thèse

**Virginie BONNAILLIE-NOËL**

Chargée de recherche CNRS / Co-directrice de thèse



## Remerciements

Je tiens en premier lieu à adresser mes remerciements les plus sincères à mes deux directrices Monique Dauge et Virgine Bonnaillie-Noël. Leurs compétences mathématiques, leur enthousiasme et leur rigueur m'ont beaucoup apporté. Mais surtout je les remercie pour la patience (il en fallait !) et la disponibilité dont elles ont fait preuve, en particulier lors des phases d'écriture. Je suppose qu'il y a toujours des moments critiques dans une thèse, sans les conseils humains qu'elles m'ont donnés et le regard objectif qu'elles ont porté sur mon travail, je ne serais sûrement pas aller au bout. Je remercie Monique pour son enthousiasme communicatif et Virginie pour son honnêteté intellectuelle qui m'a souvent impressionné. La transmission du savoir et de l'expérience est pour moi quelque chose d'important, et je les remercie de la confiance qu'elles m'ont accordé. Leur formation me sera précieuse par la suite.

Je remercie Philippe Briet et Johannes Sjöstrand d'avoir accepté d'être mes rapporteurs et je leur suis extrêmement reconnaissant d'avoir porté leur attention sur mon travail malgré sa longueur. C'est un honneur de voir un jury aussi prestigieux se réunir, je remercie Florian Méhats et San Vĩ Ngoc pour avoir bien voulu être mes examinateurs ainsi que pour les échanges que j'ai pu avoir avec eux durant ma thèse. Je remercie aussi Didier Robert et Søren Fournais d'être venu de loin (voire très loin) pour faire partie de ce jury.

Une partie de ce travail est née des nombreuses interactions que j'ai eu avec Nicolas Raymond. Je lui exprime ma gratitude pour les discussions animées, y compris celles qui ne furent pas mathématiques. J'ai appris à son contact et j'espère que nous aurons d'autres occasions de travailler ensemble dans le futur. Le défi numérique n'a pas été facile à relever au vu de mon manque d'organisation, et je n'y serai pas parvenu sans l'aide d'Yvon Lafranche, je le remercie pour son investissement dans cette partie de ma thèse et sa patience à toute épreuve.

C'est un plaisir pour moi d'enseigner les mathématiques, et je tiens à remercier tout ceux qui m'ont confié cette mission d'une manière ou d'une autre : Grégory Vial, Benjamin Boutin et sa bonne humeur perpétuelle, François Castella, Gabriel Caloz, Christophe Cheverry, Vincent Guirardel et Anton Zorich. Plus généralement je remercie tous les membres des équipes d'analyse avec qui j'ai eu des discussions, ainsi que les pongistes : Delphine, et Felix qui m'encourage à continuer la recherche.

Mon intérêt pour les mathématiques est aussi dû aux nombreux professeurs que j'ai eus avant mon arrivée à Rennes, en particulier Henry Koen et Olivier Cervera dans un premier temps, puis Frederic Pascal, Laurent Desvillettes, Frederic Lagoutière, Jean-Michel Morel, et enfin Thierry Ramond et Bernard Helffer dont les conseils "semi-classiques" sont souvent précieux. Même s'ils ne liront sûrement pas ces lignes, j'aime à penser que leur enseignement n'aura pas été totalement inutile. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon respect et de ma reconnaissance.

Je remercie aussi les membres du personnel de l'IRMAR pour leur compétence et leur gentillesse, je pense en particulier à Patrick et Olivier qui m'ont aidé dans mes nombreux soucis techniques, mais aussi à Marie-Aude, Dominique, Claude, Hélène, Marie-Annick, Chantal et tous ceux qui aident à faire tourner le laboratoire, toujours avec le sourire.

Quand je suis arrivé à Rennes je ne connaissais presque personne. J'ai été rapidement

accueilli par les habitants du 434. Je remercie Nirmoul, Richou, Alinette, John et Jobin pour m'avoir rapidement intégré et pour les pauses café pas vraiment reposantes. Je remercie spécialement mon pote Maher Kachour pour sa chaleur humaine et pour les bêtises que nous avons pu faire. Je n'oublie pas Pierre Carcaud, qui a supporté de partager son lieu de travail avec moi pendant deux ans et qui m'a secouru en de nombreuses circonstances. J'ai rencontré de nombreuses autres personnes arrivées comme moi à l'IRMAR : Anjara, Gaël, Matthieu l'adorable ours et bien sûr Damien, toujours de bonne compagnie malgré l'adversité. L'ambiance au travail et en dehors n'aurait pas été la même sans eux.

Aujourd'hui les concours de mots croisés ont succédé aux blind tests, et l'ambiance est toujours aussi bonne grâce à Kodjo, Elise (même si elle ne gagne pas souvent), Cyril et sa bonhomie, Charles, Marie, Guillaume, Christophe et Romain, toujours prêts à rendre service et à rire à mes railleries, ainsi que Yohann, qui supporte ces mêmes railleries dans notre bureau commun. J'ai aussi passé de bons moments durant mes (courts) passages au plateau de Ker Lann en compagnie de Charly, Sylvain, Thibaut ainsi que Guillaume et ses tendons d'acier. Je remercie ces deux derniers pour leur décontraction qui fait du bien au moral, pendant la rédaction comme à la salle.

En dehors du laboratoire (mais pas trop loin non plus), j'ai retrouvé Laurent Seppecher. Les gens avec qui j'ai vécu ont fait de ces années des années agréables : Laurent, Hélène, Elo, Palou, Pierre Javel et Quentinou. Les soirées escalade-plâtrée et les virées à Leclerc me manqueront. Je remercie aussi Daniel pour son amitié et son hospitalité.

“Les amis sont la famille que nous choisissons”. J'ai toujours pris un grand plaisir à revoir mes camarades de promotion, Kron, Antoine, Jim, Sandra, Cécilou, Romain, JSK et Isabelle. De nos années à l'École jusqu'aux (nombreuses) vacances au ski durant la thèse, je ne garde que des bons souvenirs, et j'espère qu'il y en aura d'autres. Ces années d'étude sont la continuation de celles commencées à Nice en compagnie de mes amis de préparatoire Flo, Pector, Johan, Benj, Anne-Charlotte, Teddy, Didier, Paul, Alex que je n'oublierai pas, et tous les autres. Je les remercie pour les bons moments passés ensemble, leurs encouragements, leurs moqueries et notre comportement d'enfant. Vous revoir maintenant me fait toujours chaud au cœur.

Je remercie ma famille proche pour m'avoir toujours soutenu. Cette thèse ne serait pas là sans l'éducation de mes parents et le support de mes trois sœurs Melanie, Margaux et Marine. Je souhaite exprimer toute ma gratitude à ma mère et la remercier pour son soutien sans faille et pour tout ce qu'elle a fait pour nous, elle ainsi que Raymond qui a toujours su nous témoigner son affection avec la discrétion qui le caractérise. Les qualités scientifiques de mon père ont souvent été un modèle. Je le remercie lui et Véronique pour leurs encouragements chaleureux durant mes études, ma thèse et en particulier la période de rédaction, et ce malgré la distance. Mes tantes ont toujours été présentes quand j'étais à Paris, et je leur en suis reconnaissant. J'ai une pensée pour mon grand père qui aurait pris un grand plaisir à feuilleter ces pages.

Je réserve dans ces remerciements une place spéciale à Julie qui partage maintenant ma vie. Cette thèse lui doit beaucoup. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour m'avoir écouté et supporté durant la rédaction de ce manuscrit-ce n'a sûrement pas été facile. J'espère qu'elle me supportera encore longtemps avec ce calme et cette sensibilité qui me sont chers.

*À mes amis,*

*À ma famille,*

*À Julie,*



# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1	Présentation de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique . . .	2
0.2	Résultats connus et objectifs . . . . .	3
0.2.1	Heuristique pour le premier terme de l'asymptotique . . . . .	3
0.2.2	Domaines modèles et asymptotiques connues . . . . .	5
0.2.3	Objectifs de la thèse . . . . .	9
0.3	Organisation de la thèse et principaux résultats . . . . .	9
0.3.1	Première partie : opérateurs modèles de Schrödinger sur la demi-droite et le demi-plan . . . . .	9
0.3.2	Deuxième partie : l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur le dièdre . . . . .	12
0.3.3	Troisième partie : étude asymptotique pour les angles petits . . .	15
0.3.4	Quatrième partie : application aux lentilles magnétiques . . . . .	19
0.4	Récapitulatif des principaux opérateurs rencontrés . . . . .	22
<b>A</b>	<b>Rappels sur les opérateurs auto-adjoints</b>	<b>27</b>
<b>B</b>	<b>L'opérateur de Schrödinger magnétique</b>	<b>29</b>
B.1	Définition de l'opérateur en dimension 3 . . . . .	29
B.2	L'opérateur avec champ électrique . . . . .	31
B.3	Transformations unitaires . . . . .	31
B.4	Formules de localisation . . . . .	33
B.5	Caractérisation du spectre essentiel . . . . .	34
B.6	Opérateurs modèles pour l'espace et le demi-espace . . . . .	35
B.6.1	Le cas de l'espace . . . . .	35
B.6.2	Le cas du demi-espace . . . . .	36
<b>C</b>	<b>Calculs du bas du spectre par éléments finis</b>	<b>39</b>
C.1	Choix du maillage . . . . .	39



C.2	Représentation de la phase . . . . .	42
<b>I</b>	<b>Opérateurs modèles sur la demi-droite et le demi-plan</b>	<b>43</b>
<b>1</b>	<b>Opérateurs modèles en dimension 1</b>	<b>45</b>
1.1	Opérateur de de Gennes . . . . .	46
1.2	Lien entre les problèmes de Dirichlet et de Neumann . . . . .	46
1.3	Variations des valeurs propres . . . . .	48
1.4	Grandes valeurs du paramètre . . . . .	50
1.4.1	Le puits singulier . . . . .	50
1.4.2	Le double puits symétrique : étude de l'effet tunnel . . . . .	55
1.4.3	Simulations numériques . . . . .	66
1.5	Effet tunnel pour un potentiel en "pic" . . . . .	72
1.5.1	Développement asymptotique des valeurs propres . . . . .	73
1.5.2	Simulations numériques pour le double puits . . . . .	79
<b>2</b>	<b>Opérateurs de Schrödinger sur le demi-plan</b>	<b>83</b>
2.1	Premières estimations sur le bas du spectre . . . . .	85
2.1.1	Monotonie et régularité . . . . .	86
2.1.2	Encadrement des valeurs propres et illustrations numériques . . . . .	88
2.1.3	Un résultat sur la dérivée . . . . .	93
2.2	Localisation des vecteurs propres . . . . .	95
2.2.1	Estimations isotropes . . . . .	95
2.2.2	Estimations transverses . . . . .	98
2.2.3	Nouveaux calculs numériques . . . . .	101
2.3	Densification du spectre pour des petits angles . . . . .	104
2.4	Construction de quasi-modes . . . . .	106
2.5	Développement asymptotique des valeurs propres . . . . .	113
<b>II</b>	<b>L'opérateur de Schrödinger magnétique sur le dièdre</b>	<b>123</b>
<b>3</b>	<b>Réduction du dièdre au secteur</b>	<b>125</b>
3.1	Réduction de la dimension . . . . .	128
3.1.1	Choix du potentiel magnétique . . . . .	128
3.1.2	Réduction à un problème sur un secteur . . . . .	130
3.2	Cas particulier d'un champ tangent à l'arête . . . . .	132

3.3	Cas d'un champ non tangent à l'arête . . . . .	135
3.3.1	Réduction du domaine d'étude . . . . .	135
3.3.2	Des conditions géométriques . . . . .	136
3.3.3	Continuité pour le bas du spectre . . . . .	139
3.4	Bornes élémentaires pour le bas du spectre . . . . .	141
3.4.1	Découpage de l'opérateur . . . . .	141
3.4.2	Inégalité diamagnétique . . . . .	146
3.4.3	Construction de quasi-modes . . . . .	148
<b>4</b>	<b>Spectre essentiel sur le secteur</b>	<b>151</b>
4.1	Opérateurs modèles sur le plan et le demi-plan . . . . .	151
4.2	Bas du spectre essentiel . . . . .	155
4.2.1	Droite sortante . . . . .	155
4.2.2	Droite entrante . . . . .	157
4.2.3	Droite tangente . . . . .	160
4.2.4	Synthèse des résultats pour le spectre essentiel de l'opérateur sur le secteur . . . . .	163
4.3	Calculs numériques pour un champ tangent . . . . .	164
4.4	Concentration des vecteurs propres . . . . .	172
<b>5</b>	<b>Grandes valeurs du paramètre de Fourier</b>	<b>175</b>
5.1	Analyse semi-classique du problème . . . . .	176
5.2	Calcul des limites . . . . .	177
5.2.1	Droite sortante . . . . .	178
5.2.2	Droite entrante . . . . .	187
5.2.3	Droite tangente . . . . .	191
5.2.4	Synthèse des résultats . . . . .	192
5.3	Un cas d'effet tunnel . . . . .	193
<b>III</b>	<b>Etude asymptotique pour de petits angles</b>	<b>201</b>
<b>6</b>	<b>Le cas du champ non bissecteur</b>	<b>203</b>
6.1	Changement de coordonnées . . . . .	203
6.2	Etude d'un opérateur unidimensionnel . . . . .	205
6.2.1	Etude asymptotique pour des grands paramètres . . . . .	208
6.2.2	Majorations par des quasi-modes . . . . .	215
6.2.3	Caractérisation du minimum . . . . .	218

6.2.4	Illustrations numériques . . . . .	223
6.3	Quasi-modes sur le secteur et conséquences . . . . .	228
6.3.1	Construction de quasi-modes et majorations . . . . .	228
6.3.2	Conséquences sur le problème de minimisation . . . . .	232
6.4	Simulations numériques . . . . .	233
6.4.1	Cas d'un champ perpendiculaire au plan bissecteur . . . . .	234
6.4.2	Cas d'un champ perpendiculaire à l'arête . . . . .	238
6.4.3	Un troisième cas . . . . .	240
<b>7</b>	<b>Le cas du champ bissecteur</b>	<b>243</b>
7.1	Le cas d'un paramètre de Fourier non nul . . . . .	243
7.1.1	Une minoration . . . . .	244
7.1.2	Illustration numérique . . . . .	246
7.2	Changements de coordonnées et premier quasi-mode . . . . .	247
7.3	Calcul de l'asymptotique . . . . .	249
7.3.1	Développement en série formelle . . . . .	249
7.3.2	Construction de quasi-mode . . . . .	251
7.3.3	Conclusion et illustration numérique . . . . .	255
7.4	Description du développement à deux termes . . . . .	261
7.4.1	Calcul explicite . . . . .	261
7.4.2	Localisation des zéros du quasi-mode à deux termes . . . . .	263
7.5	Calculs numériques et quasi-modes . . . . .	265
7.5.1	Comparaison des calculs numériques et des quasi-modes . . . . .	266
7.5.2	Etude des zéros du vecteur propre . . . . .	268
<b>IV</b>	<b>Domaines bornés avec une arête courbe</b>	<b>273</b>
<b>8</b>	<b>Application aux lentilles</b>	<b>275</b>
8.1	La lentille d'angle fixe . . . . .	275
8.2	Coordonnées locales et minoration . . . . .	278
8.2.1	Formule de changement de variables pour la forme quadratique et le champ magnétique . . . . .	278
8.2.2	Coordonnées locales près d'un point de l'arête . . . . .	279
8.2.3	Comparaison des problèmes modèles . . . . .	281
8.2.4	Minoration . . . . .	283
8.3	Construction de quasi-modes et asymptotique . . . . .	284
8.4	Lentille d'angle variable . . . . .	288

8.5	Champ magnétique contenu dans le plan de l'arête . . . . .	289
8.6	Enoncé du résultat dans un cadre plus général . . . . .	290



# Chapitre 0

## Introduction

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier théoriquement et numériquement le spectre de différents opérateurs qui interviennent dans l'étude de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant dans des domaines tridimensionnels comportant des arêtes.

L'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique et paramètre semi-classique a été l'objet de nombreux travaux ces trente dernières années. Nous citons les résultats généraux de Colin de Verdière ([CdV84]), Helffer et Sjöstrand ([HS89]), Helffer ([Hel94]), Morame et Raikov ([MR94]), Matsumoto ([Mat95]) ou Truc ([Tru97]). Plus récemment de nouveaux travaux décrivent cet opérateur pour des géométries particulières, voir par exemple Bonnaillie ([Bon05]), Fournais et Helffer ([FH06]), Raymond ([Ray09b, Ray10]) ou encore Helffer et Kordyukov ([HK11]). Ce travail s'inscrit dans cette lignée : nous commençons l'investigation systématique du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique dans des domaines tridimensionnels singuliers. Seul le cas du cube a été traité jusqu'à présent [Pan02]. Comme étape importante vers le traitement de domaines polyédraux généraux, nous considérons dans cette thèse des domaines singuliers de type diédral.

Une des motivations physiques pour étudier cet opérateur est son rôle dans la modélisation du phénomène de la supraconductivité. Les premiers travaux de Saint-James et de Gennes ([Sd63], [SJST69]) font le lien entre un champ critique associé au phénomène de supraconductivité et le bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique. Dans la suite de nombreux auteurs ont contribué à la compréhension du phénomène : Chapman ([Cha94]), Lu et Pan ([LP99b], [LP00b]), Bernoff et Sternberg ([BS98]), Giorgi et Phillips ([GP02]) ou encore Helffer et Morame ([HM96],[HM04]). Cette liste est non exhaustive et nous renvoyons à l'introduction de [FH10] pour une historique plus détaillée du sujet.

### Plan de l'introduction

Dans la section 0.1 nous introduisons l'opérateur de Schrödinger semi-classique avec champ magnétique constant et les notations associées. Dans la section 0.2 nous présentons des résultats connus sur le bas du spectre de cet opérateur selon la géométrie du domaine. En particulier nous expliquons que l'asymptotique du bas du spectre quand le paramètre

semi-classique tend vers 0 se déduit de l'étude de l'opérateur sur des domaines modèles. Dans la section 0.3 nous présentons un plan de la thèse et nous énonçons les principaux résultats obtenus. La section 0.4 donne un récapitulatif sous forme de tables des opérateurs rencontrés au long de ce travail.

## 0.1 Présentation de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique

Soit un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique associé à un potentiel  $\mathbf{A}$  tel que  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Soit  $h > 0$  un réel. Le problème considéré est le problème spectral :

Trouver  $\psi \neq 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} -(h\nabla - i\mathbf{A})^2\psi = \lambda\psi & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot (h\nabla - i\mathbf{A})\psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale extérieure au bord  $\partial\Omega$  de l'ouvert  $\Omega$ . Le paramètre  $h$  est destiné à tendre vers 0 et est appelé "paramètre semi-classique".

Nous allons nous intéresser aux solutions du problème (1) quand  $h$  tend vers 0. Nous définissons le gradient magnétique semi-classique :

$$\nabla_{\mathbf{A},h} := h\nabla - i\mathbf{A}. \quad (2)$$

La réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger magnétique semi-classique sur le domaine  $\Omega$  est l'opérateur

$$P_{\mathbf{A},\Omega,h} = -\nabla_{\mathbf{A},h}^2$$

défini sur le domaine

$$\text{Dom}(P_{\mathbf{A},\Omega,h}) := \{u \in L^2(\Omega), \nabla_{\mathbf{A},h}^2 u \in L^2(\Omega), \nu \cdot \nabla_{\mathbf{A},h} u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On note que

$$P_{\mathbf{A},\Omega,h} = h^2 P_{\frac{\mathbf{A}}{h},\Omega,1},$$

ainsi le comportement de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique de grande intensité se déduit directement de l'étude de l'opérateur de Schrödinger  $P_{\mathbf{A},\Omega,h}$  quand le paramètre  $h$  tend vers 0.

### Invariance de jauge

En vertu de la propriété classique d'invariance de jauge (voir la proposition B.2) le spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A},\Omega,h}$  ne dépend que du champ magnétique  $\mathbf{B} := \text{rot } \mathbf{A}$ . Soit  $\mathfrak{S}(P_{\mathbf{A},\Omega,h})$  le spectre de  $P_{\mathbf{A},\Omega,h}$ . Nous notons

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) := \inf \mathfrak{S}(P_{\mathbf{A},\Omega,h}) \quad (3)$$

et ce quel que soit le choix du potentiel magnétique  $\mathbf{A}$  tel que  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ .

**On suppose partout que  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  est un champ magnétique constant unitaire**

## 0.2 Résultats connus et objectifs

Nous cherchons à déterminer le comportement asymptotique de  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  quand  $h$  tend vers 0, en particulier nous cherchons à comprendre l'influence de la géométrie de  $\Omega$  sur cette asymptotique.

### 0.2.1 Heuristique pour le premier terme de l'asymptotique

Nous commençons par rappeler les techniques issues de l'analyse semi-classique qui nous conduisent à étudier l'opérateur de Schrödinger magnétique sans paramètre semi-classique ( $h = 1$ ) sur des domaines non bornés appelés “domaines modèles”.

La procédure ci-dessous concerne une certaine classe d'ouverts simplement connexes bornés : dans le cas de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  est un domaine polygonal curviligne avec un nombre fini de sommets, et dans le cas de  $\mathbb{R}^3$ , l'ouvert  $\Omega$  est un domaine polyédral avec un nombre fini de sommets et d'arêtes.

#### Partition de l'unité

Nous voulons étudier le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  quand  $h$  tend vers 0. Comme  $\Omega$  est borné, l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  est à résolvante compacte et son spectre est discret. On note pour l'instant

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) := \int_{\Omega} |(h\nabla - i\mathbf{A})u|^2$$

la forme quadratique associée à l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$ . Le principe du min-max (voir la proposition A.1) nous amène à minimiser la forme quadratique  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  pour trouver la première valeur propre  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  :

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = \min_{u \in \text{Dom}(P_{\mathbf{A}, \Omega, h})} \frac{q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Voici une formule de localisation fondamentale : si  $(\chi_j^h)_j$  est une partition de l'unité composée de fonctions à support compact telles que  $\sum_j (\chi_j^h)^2 = 1$  dans  $\Omega$ , on a l'identité suivante dite “formule IMS” :

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) = \sum_j q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j \|u|\nabla \chi_j^h|\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4)$$

Supposons pour le moment que le terme de reste

$$h^2 \sum_j \|u|\nabla \chi_j^h|\|_{L^2(\Omega)}^2$$

soit négligeable. Sous cette hypothèse, on voit que pour estimer  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u)$ , on est ramené à estimer  $q_{\mathbf{A}, \Omega_j^h, h}(u)$  où les  $\Omega_j^h = \text{supp}(\chi_j^h) \cap \Omega$  sont des sous-domaines bien choisis de  $\Omega$ .



### Minoration grossière

En minorant  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u)$  par le minimum sur  $j$  des quantités  $q_{\mathbf{A}, \Omega_j^h, h}(u)$  et en sommant sur  $j$ , on s'attend à minorer (à un terme d'erreur près) la forme quadratique  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u)$  par l'infimum sur  $j$  des spectres des opérateurs  $P_{\mathbf{A}, \Omega_j^h, h}$ . En utilisant des estimations d'Agmon, on s'attend de plus à ce qu'un vecteur propre  $u$  qui minimise la quantité  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u)$  soit localisé près des domaines  $\Omega_j^h$  où le spectre de  $P_{\mathbf{A}, \Omega_j^h, h}$  est le plus petit.

### Construction de quasi-modes et majorations

Nous cherchons à construire une fonction sur  $\Omega$  qui rende la forme quadratique  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  la plus petite possible. Une telle fonction est génériquement appelé un “quasi-mode”. La partition du domaine  $\Omega$  donne une méthode pour construire un quasi-mode : on sélectionne  $j_0$  tel que

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega_{j_0}^h, h) = \min_j \lambda(\mathbf{B}; \Omega_j^h, h)$$

et on prend un vecteur propre  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega_{j_0}^h, h)$ . Si la fonction  $u$  a de bonnes propriétés de localisation, elle va fournir un bon quasi-mode pour la forme quadratique  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}$ . On obtiendra ainsi une majoration de la quantité  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  par  $\min_j \lambda(\mathbf{B}; \Omega_j^h, h)$  modulo des termes d'erreurs.

On peut alors affiner la construction de quasi-mode : on perturbe  $(u, \lambda(\mathbf{B}; \Omega_{j_0}^h, h))$  en une paire  $(v, \lambda)$  où la fonction  $v$  est dans le domaine de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  et  $\lambda$  est un réel. On ajuste  $(v, \lambda)$  de manière à ce que la quantité  $\|P_{\mathbf{A}, \Omega, h} v - \lambda v\|$  soit petite. Le théorème spectral nous dit que l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  possède du spectre près de  $\lambda$ . Cette construction de quasi-mode se fait à l'aide de la géométrie de  $\Omega_j^h$  et fournit une majoration précise de  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$ .

La minoration est plus technique et nous en faisons une heuristique succincte ici. Nous renvoyons à l'introduction de [Ray09a] pour une heuristique détaillée de la méthode. L'idée générale est de se servir d'estimations de concentration des vecteurs propres issues de la minoration grossière évoquée ci-dessus. On peut alors utiliser les vecteurs propres comme des quasi-modes pour les opérateurs  $P_{\mathbf{A}, \Omega_j^h, h}$ . Cette procédure a pour but de fournir une séparation des valeurs propres de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  (appelée “spectral gap”), nécessaire pour appliquer le théorème spectral.

### Changement d'échelle semi-classique

Dans la procédure ci-dessus, nous avons besoin de connaître le spectre de l'opérateur avec champ magnétique constant sur les sous-domaines  $\Omega_j^h$ . Nous montrons ci-dessous l'intérêt d'étudier des domaines “modèles” infinis pour comprendre le spectre de  $P_{\mathbf{A}, \Omega_j^h, h}$ .

Pratiquement les sous-domaines  $\Omega_j^h$  effectuent une localisation autour de certains points quand  $h$  tend vers 0. Plus précisément, chaque famille  $(\Omega_j^h)_h$  est associée à un point  $x_j$

qui est dans  $\overline{\Omega_j^h}$  pour tout  $h$ . Fixons  $j$ . Nous effectuons à partir du point  $x_j$  le changement d'échelle semi-classique

$$X - x_j = \frac{x - x_j}{\sqrt{h}}. \quad (5)$$

On voit que l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega_j^h, h}$  est unitairement équivalent à  $hP_{\mathbf{A}, \Pi_j^h, 1}$  avec

$$\Pi_j^h := \left\{ x_j + \frac{x - x_j}{\sqrt{h}}, x \in \Omega_j^h \right\}.$$

Si nous supposons que la taille du support de  $\chi_j^h$  est d'ordre  $h^\rho$  avec  $\rho < \frac{1}{2}$ , alors la taille du diamètre de  $\Pi_j^h$  est de l'ordre de  $h^{\rho - \frac{1}{2}}$  et tend donc vers l'infini quand  $h$  tend vers 0. On introduit

$$\Pi_j := \lim_{h \rightarrow 0} \Pi_j^h.$$

Le domaine non borné  $\Pi_j$  se déduit de la géométrie des voisinages de  $x_j$  dans  $\overline{\Omega}$  :

- Si  $x_j$  est un point intérieur de  $\Omega$ , alors  $\Pi_j = \mathbb{R}^2$  en dimension 2 (respectivement  $\Pi_j = \mathbb{R}^3$  en dimension 3).
- Si  $x_j$  est un point d'une partie régulière du bord de  $\Omega$ , alors  $\Pi_j$  est un demi-plan (respectivement un demi-espace en dimension 3).
- En dimension 2, si  $x_j$  est un sommet de  $\overline{\Omega}$  d'ouverture  $\alpha$ , alors  $\Pi_j$  est un secteur infini d'angle  $\alpha$ . Nous notons

$$\mathcal{S}_\alpha := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_2| \leq x_1 \tan \frac{\alpha}{2}\}$$

le modèle pour ces secteurs.

- En dimension 3, si  $x_j$  est sur une arête de  $\overline{\Omega}$ , alors  $\Pi_j$  est isométrique au dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  que nous définissons comme

$$\mathcal{D}_\alpha := \mathcal{S}_\alpha \times \mathbb{R}. \quad (6)$$

- Toujours en dimension 3, si  $x_j$  est sur un sommet de  $\overline{\Omega}$ , alors  $\Pi_j$  est un coin polyédral droit.

Dans tous les cas, nous sommes ramenés à étudier l'opérateur de Schrödinger sans paramètre semi-classique sur un domaine non borné ( $h = 1$ ). Dans ce travail, nous nous intéresserons essentiellement aux cas des domaines à arête et laissons le cas des coins polyédraux pour des développements ultérieurs.

## 0.2.2 Domaines modèles et asymptotiques connues

Nous abrégeons les notations en posant

$$P_{\mathbf{A}, \Omega, 1} = P_{\mathbf{A}, \Omega}$$

l'opérateur de Schrödinger magnétique sans paramètre semi-classique et  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega)$  le bas de son spectre. Nous avons vu l'utilité d'étudier cet opérateur sur des domaines infinis dits "domaines modèles".

## Le cas de la dimension 2

Nous notons  $(x_1, x_2)$  les variables cartésiennes. Les résultats présentés ci-dessous correspondent à un potentiel magnétique plan  $\underline{\mathbf{A}} = (a_1, a_2)$  dont le rotationnel  $\text{rot } \underline{\mathbf{A}} = \partial_{x_1} a_2 - \partial_{x_2} a_1$  vaut 1. Pour un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  et un tel potentiel magnétique, nous notons

$$\underline{\lambda}(\Omega, h) = \inf \mathfrak{S}(P_{\underline{\mathbf{A}}, \Omega, h})$$

et

$$\underline{\lambda}(\Omega) = \underline{\lambda}(\Omega, 1) .$$

Nous prenons comme potentiel magnétique  $\underline{\mathbf{A}}^L(x_1, x_2) = (0, -x_1)$  de sorte que  $\text{rot } \underline{\mathbf{A}}^L = 1$ . Il est connu depuis les travaux de Landau que

$$\underline{\lambda}(\mathbb{R}^2) = 1 .$$

Le cas du demi-plan  $\mathbb{R}_+^2 := \{x_1 > 0\}$  est instructif. Nous citons les travaux de Helffer et Morame ([HM02]), Lu et Pan ([LP99b], [LP99a] et [LP00a]), Del Pino, Felmer et Sternberg ([DPFS00]), ou encore Bernoff et Sternberg ([BS98]). L'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^L, \mathbb{R}_+^2}$  s'écrit

$$(i\partial_{x_1})^2 + (i\partial_{x_2} - x_1)^2 , \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$$

avec condition de Neumann magnétique en  $x_1 = 0$ . Puisque le domaine est invariant par translation selon  $x_2$ , on réalise une transformation de Fourier partielle par rapport à  $x_2$  et on obtient que l'opérateur est unitairement équivalent à

$$-\partial_{x_1}^2 + (\xi_2 - x_1)^2 , \quad (x_1, \xi_2) \in \mathbb{R}_+^2 .$$

Ainsi l'étude de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^L, \mathbb{R}_+^2}$  se ramène à l'étude de la famille d'opérateurs à paramètre souvent appelés opérateurs de de Gennes

$$\mathfrak{h}_\tau^N := -\partial_t^2 + (t - \tau)^2 , \quad t > 0 \tag{7}$$

avec condition de Neumann en  $t = 0$ . On note  $\mu_1^N(\tau)$  le bas du spectre de cet opérateur. De telles familles d'opérateurs à paramètre sont étudiées dans [BH93] puis [DH93a], en particulier il est remarquable que la fonction  $\tau \mapsto \mu_1^N(\tau)$  admette un unique minimum non dégénéré noté  $\Theta_0$  atteint en  $\tau = \xi_0$ . On a (voir [BN12]) :

$$\Theta_0 \approx 0.590106125$$

En notant  $u_{\xi_0}^N$  un vecteur propre normalisé associé à  $\Theta_0$ , nous introduisons la constante

$$C_1 := \frac{u_{\xi_0}^N(0)^2}{2} \approx 0.381102161$$

(voir [BN12] pour l'approximation numérique).

On peut déduire le spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique sur le demi-plan pour un potentiel vérifiant  $\text{rot } \underline{\mathbf{A}} = 1$  :

$$\mathfrak{S}(P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathbb{R}_+^2}) = [\Theta_0, +\infty) ,$$

et donc

$$\underline{\lambda}(\mathbb{R}_+^2) = \Theta_0 .$$

Revenons au cas semi-classique sur un domaine borné. On peut énoncer un développement asymptotique pour  $\underline{\lambda}(\Omega, h)$  quand  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^2$  sous des hypothèses concernant la courbure du bord  $\partial\Omega$ . Helffer et Morame ([HM96] et [HM04]) avaient déjà obtenu les deux premiers termes du développement asymptotique quand  $h$  tend vers 0, et ce résultat est amélioré par Fournais et Helffer ([FH06]) :

**Théorème 0.1.** *Supposons que  $\Omega$  est un ouvert borné simplement connexe régulier de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons aussi que la courbure de  $\partial\Omega$  donnée par  $s \mapsto \kappa(s)$  admette un unique maximum non dégénéré (noté  $\kappa_{\max}$ ) atteint en  $s_0$  et notons  $\kappa_2 = -\kappa''(s_0)$ . Notons  $\underline{\lambda}_n(\Omega, h)$  la  $n$ -ième valeur propre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \Omega, h}$  avec  $\text{rot } \underline{\mathbf{A}} = 1$ . Alors il existe une suite de réels  $(\xi_j^n)_j$  telle que  $\underline{\lambda}_n(\Omega, h)$  admet le développement suivant lorsque  $h$  tend vers 0 :*

$$\underline{\lambda}_n(\Omega, h) \sim \Theta_0 h - \kappa_{\max} C_1 h^{3/2} + C_1 \Theta_0 \sqrt{\frac{3\kappa_2}{2}} (2n-1) h^{7/4} + h^{15/8} \sum_{j \geq 0} h^{j/8} \xi_j^n . \quad (8)$$

*De plus les vecteurs propres se concentrent près du point de  $\partial\Omega$  de courbure maximale quand  $h$  tend vers 0.*

Si le domaine n'est plus régulier mais polygonal avec un nombre fini de coins, il faut introduire un nouvel opérateur modèle :  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha}$  où  $\mathcal{S}_\alpha$  est le secteur modèle d'angle  $\alpha$ . On note  $\mu(\alpha)$  le bas du spectre de cet opérateur :

$$\mu(\alpha) := \underline{\lambda}(\mathcal{S}_\alpha) .$$

Dans le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , on peut citer les premiers résultats de [BDFM99] et dans un contexte plus mathématique ceux de ([Jad01a], [Jad01b] et [Pan02]). Pour le cas général  $\alpha \in (0, \pi]$ , les travaux de Bonnaillie-Noël, ([Bon03a], [Bon03b], [Bon05]) éclairent le problème. Il est montré en particulier :

$$\forall \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}] , \quad \mu(\alpha) < \Theta_0 . \quad (9)$$

L'étude de ce cas modèle permet d'étudier le spectre de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \Omega, h}$  quand  $h$  tend vers 0 et  $\Omega$  est un ouvert polygonal ([BND06], [BNF07] et [BNDMV07]). On a en particulier (voir [BND06]) :

**Théorème 0.2.** *Soit  $\Omega$  un domaine dont le bord est un polygone courbe avec un nombre fini de sommets. Nous notons  $\alpha_1 \cdots \alpha_N$  les angles des sommets de  $\Omega$ . Soit  $\underline{\lambda}(\Omega, h)$  le bas du spectre de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \Omega, h}$  avec  $\text{rot } \underline{\mathbf{A}} = 1$ . Alors on a le développement asymptotique suivant quand  $h$  tend vers 0 :*

$$\underline{\lambda}(\Omega, h) = \inf \left( \inf_j \mu(\alpha_j), \Theta_0 \right) h + O(h^{3/2}) .$$

On voit en utilisant (9) et en comparant ce résultat au théorème 0.1 que la présence d'un coin d'angle suffisamment petit diminue le bas du spectre par rapport au cas où  $\Omega$  est régulier.

### Le cas de la dimension 3

Nous commençons par rappeler des résultats pour les domaines modèles réguliers infinis : l'espace et le demi-espace. Pour le cas où  $\Omega$  est l'espace entier, on a

$$\lambda(\mathbf{B}; \mathbb{R}^3) = 1. \quad (10)$$

Dans le cas du demi-espace (noté  $\mathbb{R}_+^3$ ), nous paramétrons la situation selon l'angle  $\theta$  que fait le champ magnétique (noté  $\mathbf{B}_\theta$ ) avec le bord du demi-espace. On définit

$$\sigma(\theta) := \lambda(\mathbf{B}_\theta; \mathbb{R}_+^3). \quad (11)$$

Une transformation de Fourier partielle permet de se ramener à l'étude d'un opérateur en dimension deux. En effet on introduit la réalisation de Neumann de

$$\mathcal{L}_\theta := -\Delta + (t \cos \theta - s \sin \theta)^2, \quad (t, s) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (12)$$

et on pose pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sigma_1(\theta) := \inf \mathfrak{S}(\mathcal{L}_\theta), \quad (13)$$

on a alors (voir [LP99b]) pour  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\sigma(\theta) = \sigma_1(\theta).$$

La fonction  $\theta \mapsto \sigma(\theta)$  est étudiée dans [LP00b], [HM02] ou encore [MT05]. Elle est strictement croissante de  $[0, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[\Theta_0, 1]$ . Ainsi le bas du spectre du problème modèle du demi-espace soumis à un champ magnétique constant est minimal quand le champ magnétique est tangent au bord ( $\theta = 0$ ) et la valeur associée est  $\Theta_0$ .

Nous étudions maintenant l'opérateur de Schrödinger magnétique semi-classique  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  sur un ouvert régulier borné de  $\mathbb{R}^3$ . En suivant le raisonnement heuristique de la sous-section 0.2.1, on s'attend à ce que la famille de problèmes modèles associée à une partition ait son spectre minimal quand le champ magnétique  $\mathbf{B} := \text{rot } \mathbf{A}$  est tangent au bord de  $\Omega$  (et le bas du spectre vaut  $\Theta_0$ ). Nous notons  $\Gamma$  l'ensemble des points de  $\partial\Omega$  où le champ magnétique est tangent au bord de  $\Omega$ . Nous supposons que  $\Gamma$  est une courbe régulière de  $\partial\Omega$ . Alors on a (voir [LP00b]) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)}{h} = \Theta_0,$$

de plus les vecteurs propres se concentrent le long de  $\Gamma$ .

On cherche le terme suivant de l'asymptotique et la localisation précise des fonctions propres le long de  $\Gamma$ . Helffer et Morame montrent dans [HM04] le résultat suivant (qui était conjecturé par Pan) :

**Théorème 0.3.** *Soit  $\Omega$  un ouvert régulier borné de  $\mathbb{R}^3$ . Nous supposons que le champ magnétique  $\mathbf{B} := \text{rot } \mathbf{A}$  est constant unitaire. Soit  $\Gamma$  l'ensemble des points de  $\partial\Omega$  où le champ magnétique est tangent au bord de  $\Omega$ . Nous supposons que  $\Gamma$  est une courbe régulière de  $\partial\Omega$ . Nous supposons aussi que l'ensemble des points de  $\Gamma$  où  $\mathbf{B}$  est tangent à  $\Gamma$  est isolé. Alors il existe une constante  $\gamma_0(\mathbf{B}, \Omega) > 0$  indépendante de  $h$  telle que*

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = \Theta_0 h + \gamma_0(\mathbf{B}, \Omega) h^{4/3} + O(h^{4/3+\eta}), \quad (\eta > 0). \quad (14)$$

La constante  $\gamma_0(\mathbf{B}, \Omega)$  fait intervenir des constantes universelles issues de familles d'opérateurs unidimensionnels à paramètre : l'opérateur de de Gennes présenté en (7) et l'opérateur de Montgomery (voir [Mon95], [PK02] et plus récemment [Hel10]). Cette constante dépend de la géométrie du domaine  $\Omega$  et du champ magnétique  $\mathbf{B}$ , plus précisément il s'agit du minimum d'une fonction définie sur  $\Gamma$  qui dépend de la courbure normale le long du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et de la position du champ magnétique par rapport à la courbe  $\Gamma$ .

De plus les vecteurs propres associés à  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  se localisent quand  $h$  tend vers 0 près des points de  $\Gamma$  qui minimisent cette fonction. Nous renvoyons à [FH10, section 9.2] pour une présentation des éléments clefs de la preuve de ce théorème.

Dans le cas d'un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  non régulier, un seul cas est traité : celui d'un cube noté  $\mathfrak{C}$  (voir [Pan02]). Pan étudie l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur le dièdre d'angle droit  $\mathcal{D}_{\frac{\pi}{2}}$  et sur l'octant  $(\mathbb{R}_+)^3$ , et montre que si le champ magnétique  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  est contenu dans un des plans de coordonnées sans être parallèle à un des axes, alors le problème modèle associé à l'octant a une valeur propre strictement inférieure à celle de l'opérateur sur le dièdre  $\mathcal{D}_{\frac{\pi}{2}}$ . L'auteur déduit un résultat pour l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathfrak{C}, h}$  sur le cube : si le champ magnétique  $\text{rot } \mathbf{A}$  est contenu dans une des faces sans être parallèle à une des arêtes, alors les vecteurs propres se concentrent près des coins du cube lorsque  $h$  tend vers 0.

### 0.2.3 Objectifs de la thèse

Le cadre de ce travail est la poursuite de l'étude de l'opérateur de Schrödinger magnétique semi-classique sur des ouverts bornés ainsi que des opérateurs modèles associés. Initialement l'objectif était de traiter le cas d'un domaine  $\Omega$  tridimensionnel possédant des arêtes et des coins polyédraux. Durant la thèse nous nous sommes penchés sur un domaine  $\Omega$  de type diédral, c'est-à-dire possédant une arête. Nous espérons par la suite pouvoir poursuivre ce travail en étudiant le cas d'un coin polyédral.

Nous étudions un nouvel opérateur modèle : l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur le dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  (ce dièdre est défini en (6)). Nous chercherons en particulier à comparer le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  avec celui des opérateurs modèles présentés plus haut. Nous appliquons finalement les résultats obtenus à l'opérateur de Schrödinger magnétique semi-classique sur un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  possédant une arête courbe.

## 0.3 Organisation de la thèse et principaux résultats

### 0.3.1 Première partie : opérateurs modèles de Schrödinger sur la demi-droite et le demi-plan

Dans la première partie, nous revenons sur les opérateurs modèles cités ci-dessus qui interviennent dans le cas régulier. Le chapitre 1 est consacré à l'étude d'opérateurs de

Schrödinger unidimensionnels. Nous nous intéressons particulièrement à l'opérateur autoadjoint à résolvante compacte  $\mathfrak{h}_\tau^N$  défini en (7). Nous notons  $(\mu_k^N(\tau))_{k \geq 1}$  ses valeurs propres rangées par ordre croissant. Nous introduisons l'opérateur symétrisé sur  $\mathbb{R}$  :

$$\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}} := -\partial_t^2 + (|t| - \tau)^2, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Nous notons  $\mu_k^{\text{sym}}(\tau)$  sa  $k$ -ième valeur propre. Le spectre de l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^N$  se déduit des  $\mu_k^{\text{sym}}(\tau)$ , en effet on montre à la proposition 1.1 :

$$\mu_k^N(\tau) = \mu_{2k-1}^{\text{sym}}(\tau),$$

de plus les vecteurs propres pairs de  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  fournissent par restriction à  $\mathbb{R}_+$  ceux de  $\mathfrak{h}_\tau^N$ .

Nous étudions alors l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  pour de grandes valeurs de  $|\tau|$ . Il s'agit d'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel pair singulier en 0 si  $\tau \neq 0$ . Nous donnons une asymptotique quand  $\tau \rightarrow -\infty$  des valeurs propres de cet opérateur à l'aide des techniques semi-classiques usuelles (voir [Sim83] par exemple). Plus précisément on a pour tout  $k \geq 1$  les développements asymptotiques suivants lorsque le paramètre  $\tau$  tend vers  $-\infty$  (voir le théorème 1.7) :

$$\begin{cases} \mu_{2k-1}^{\text{sym}}(\tau) \underset{\tau \rightarrow -\infty}{=} \tau^2 + 2^{2/3} \dot{z}_k^a |\tau|^{2/3} + o(|\tau|^{2/3}) \\ \mu_{2k}^{\text{sym}}(\tau) \underset{\tau \rightarrow -\infty}{=} \tau^2 + 2^{2/3} z_k^a |\tau|^{2/3} + o(|\tau|^{2/3}) \end{cases},$$

où  $-z_k^a$  (respectivement  $-\dot{z}_k^a$ ) est le  $k$ -ième zéro de la fonction d'Airy de première espèce (respectivement de sa dérivée).

Dans le cas  $\tau \rightarrow +\infty$ , on sait d'après des arguments de monotonie (voir [FH10]) que  $\mu_1^N(\tau)$  tend vers 1 par valeurs inférieures. Grâce à une construction de quasi-modes, il est montré dans [FHP11] que  $|\mu_1^N(\tau) - 1|$  tend vers 0 exponentiellement vite quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ , mais la construction de quasi-mode ne permet pas de montrer que  $\mu_1^N(\tau)$  est inférieur à 1 pour  $\tau$  grand. Nous interprétons cette convergence à l'aide de l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  : le potentiel  $t \mapsto (|t| - \tau)^2$  est (pour  $\tau > 0$ ) un double puits singulier en  $t = 0$  (voir la figure 1.6) et on peut s'attendre à un phénomène d'effet tunnel lorsque  $\tau$  devient grand. Nous calculons le terme d'interaction comme décrit dans [HS85], mais les méthodes WKB usuelles ne permettent pas de calculer un développement asymptotique de ce terme à cause de la singularité du potentiel. Le théorème 1.11 fournit un développement asymptotique à trois termes des valeurs propres de l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  quand  $\tau \rightarrow +\infty$  :

$$\begin{cases} \mu_{2k-1}^{\text{sym}}(\tau) \underset{\tau \rightarrow +\infty}{=} 2k - 1 - \frac{2^k}{(k-1)!\sqrt{\pi}} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 1 - \frac{k^2 - k - 1}{2\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right) \\ \mu_{2k}^{\text{sym}}(\tau) \underset{\tau \rightarrow +\infty}{=} 2k - 1 + \frac{2^k}{(k-1)!\sqrt{\pi}} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 1 - \frac{k^2 - k + 1}{2\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right) \end{cases}.$$

L'idée de la preuve est basée sur une construction de quasi-modes inspirée de [Bol92] afin d'estimer le terme d'interaction. On constate que la  $k$ -ième paire de valeurs propres est centrée autour de la valeur  $2k - 1$  (voir le corollaire 1.14). Cette valeur correspond à la  $k$ -ième valeur propre d'un opérateur modèle : l'oscillateur harmonique réel avec potentiel quadratique.

Nous donnons aussi un deuxième exemple explicite de phénomène d'effet tunnel pour un potentiel singulier : nous étudions un opérateur de Schrödinger semi-classique avec potentiel en double puits pour lequel les minima ne sont plus quadratiques mais affines (voir la figure 1.14). Le théorème 1.16 précise l'asymptotique du spectre et montre en particulier que les valeurs propres se regroupent par paires exponentiellement proches. Il est remarquable que le “splitting” des valeurs propres ait lieu à une échelle différente de celle prévue par la théorie pour les potentiels à minima réguliers. Encore une fois on observe que les paires de valeurs propres sont centrées autour des valeurs d'un problème modèle. Des simulations numériques illustrent ces résultats.

Une grande partie des résultats du chapitre 2 est issue de [BNDPR12]. Nous revenons sur l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  défini en (16) par

$$\mathcal{L}_\theta := -\Delta + (t \cos \theta - s \sin \theta)^2, \quad (t, s) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (16)$$

Nous démontrons la stricte croissance de toutes ses valeurs propres sur l'intervalle  $(0, \frac{\pi}{2})$  et nous obtenons un encadrement des valeurs propres (propositions 2.10 et 2.11).

Nous montrons des estimations de concentration des vecteurs propres associés à des valeurs propres situées sous le spectre essentiel. Ces estimations sont de deux types :

- Isotropes : nous montrons que les vecteurs propres décroissent exponentiellement quand on s'éloigne du bord du demi-espace (théorème 2.15).
- Transverses : nous montrons que les vecteurs propres décroissent exponentiellement quand on s'éloigne de la droite d'annulation du potentiel, c'est-à-dire de la droite  $\{t \cos \theta - s \sin \theta = 0\}$  (théorème 2.18).

Des calculs numériques de vecteurs propres issus de [BNDPR12] viennent illustrer ces résultats.

On s'intéresse ensuite au comportement des valeurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  lorsque  $\theta$  tend vers 0. On montre que leur nombre tend vers l'infini et nous donnons une minoration du nombre de valeurs propres situées sous le spectre essentiel. Nous montrons aussi que l'ensemble des valeurs propres situées sous le spectre essentiel se densifie dans l'intervalle  $[\Theta_0, 1]$  quand  $\theta$  tend vers 0.

On démontre une asymptotique précise de la  $n$ -ième valeur propre située sous le spectre essentiel. Un changement de variable bien choisi permet de se ramener à l'opérateur (avec condition de Neumann sur le bord  $\{z = 0\}$ ) :

$$\mathfrak{L}_h := -h\partial_y^2 - \partial_z^2 + (z - \xi_0 - yh^{1/2})^2 - \Theta_0, \quad (y, z) \in \mathbb{R}_+^2$$

où  $h = \tan \theta$  et  $\xi_0$  est le paramètre réel tel que  $\mu_1^N(\xi_0) = \Theta_0$ . Ainsi lorsque  $\theta$  tend vers 0,  $h$  joue le rôle d'un paramètre semi-classique. Une construction de paires propres en séries formelles du paramètre  $h$  fournit des quasi-modes pour l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$  et une majoration pour sa  $n$ -ième valeur propre. La minoration est plus technique : on remplace le terme  $-\partial_z^2 + (z - \xi_0 - yh^{1/2})^2 - \Theta_0$  par son énergie fondamentale  $\mu_1^N(\xi_0 + yh^{1/2}) - \Theta_0$ . On est alors ramené à étudier l'opérateur unidimensionnel (appelé “approximation de Born-Oppenheimer”) :

$$\mathfrak{L}_h^{\text{BO}} := -h\partial_y^2 + \mu_1^N(\xi_0 + yh^{1/2}) - \Theta_0, \quad y \in \mathbb{R}.$$



Il faut montrer que cet opérateur est une bonne approximation pour l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$  quand  $h$  tend vers 0. On utilise des estimations d'Agmon pour localiser les éléments propres et un procédé de Grushin pour comparer les spectres des deux opérateurs. En revenant à l'opérateur initial  $\mathcal{L}_\theta$ , on déduit une asymptotique à tout ordre en puissance de  $\theta$  quand  $\theta$  tend vers 0 :

$$\sigma_n(\theta) \sim \Theta_0 + (2n-1)\sqrt{\frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2}}\theta + \sum_{j \geq 2} \beta_{n,j}\theta^j$$

où  $(\beta_{j,n})_{j \geq 2}$  est une suite de réels.

### 0.3.2 Deuxième partie : l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur le dièdre

Nous notons  $(x_1, x_2, x_3)$  les variables cartésiennes de l'espace. Dans ces variables nous notons

$$\mathcal{D}_\alpha := \mathcal{S}_\alpha \times \mathbb{R}$$

avec  $\mathcal{S}_\alpha := \{|x_2| < x_1 \tan \frac{\alpha}{2}\}$  le secteur infini d'angle  $\alpha$ . L'ouvert  $\mathcal{D}_\alpha$  est un dièdre d'angle d'ouverture  $\alpha$ . Son plan bissecteur est le plan  $\{x_2 = 0\}$ . Nous supposons  $\alpha \in (0, \pi]$ , autrement dit nous ne nous intéresserons qu'à des domaines convexes.

Nous présentons un nouvel opérateur modèle : l'opérateur de Schrödinger sur le dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ . Nous supposons que le dièdre est soumis à un champ magnétique donné

$$\mathbf{B} := (b_1, b_2, b_3)$$

constant unitaire. Un choix possible pour le potentiel magnétique est donné par le potentiel magnétique linéaire dit "symétrique" :

$$\mathbf{A}^S(x_1, x_2, x_3) := \left(-\frac{x_2}{2}b_3, \frac{x_1}{2}b_3, x_2b_1 - x_1b_2\right).$$

Nous sommes ainsi amenés à étudier l'opérateur (avec condition de Neumann sur le bord du dièdre) :

$$P_{\mathbf{A}^S, \mathcal{D}_\alpha} := \left(-i\partial_{x_1} + \frac{x_2}{2}b_3\right)^2 + \left(-i\partial_{x_2} - \frac{x_1}{2}b_3\right)^2 + (-i\partial_{x_3} + x_1b_2 - x_2b_1)^2.$$

Le spectre de cet opérateur ne dépend que de  $\mathbf{B}$  et de l'angle  $\alpha$ . On note donc

$$s(\mathbf{B}; \alpha) := \inf \mathfrak{S}(P_{\mathbf{A}^S, \mathcal{D}_\alpha}).$$

En reprenant les notations précédentes, on a

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \lambda(\mathbf{B}; \mathcal{D}_\alpha).$$

Dans le chapitre 3 nous discutons du choix du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  qui vérifie  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$  et nous définissons une classe de potentiels magnétiques associée au champ  $\mathbf{B}$ , en particulier les éléments de cette classe ne dépendent pas de la variable  $x_3$ . Pour un élément

A de cette classe, nous montrons que l'étude de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  se ramène à l'étude d'une famille d'opérateurs à paramètre sur le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$ , en effet une transformation de Fourier donne la décomposition en intégrale directe :

$$P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha} = \int_{\tau \in \mathbb{R}}^{\oplus} (P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}) d\tau \quad (17)$$

où  $\underline{\mathbf{A}}$  est un potentiel magnétique plan composé des deux premières composantes du potentiel  $\mathbf{A}$  et où le potentiel électrique  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est défini par

$$V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}(x_1, x_2) := (x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau)^2 .$$

On définit le bas du spectre de l'opérateur sur le secteur :

$$\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) := \inf \mathfrak{S} (P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau})$$

et on a la relation fondamentale

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) . \quad (18)$$

Ce procédé classique de réduction de dimension est puissant : il permet, partant d'un opérateur en dimension 3, de se ramener à l'étude d'une famille d'opérateurs en dimension 2. Cette relation donne aussi une façon de calculer numériquement le bas du spectre de  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  par échantillonnage de  $\tau$  : on calcule le bas du spectre des opérateurs  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  pour des valeurs de  $\tau$  bien choisies et on utilise la relation (18) pour déduire une estimation numérique de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$ .

On présente des relations de symétrie par rapport au champ magnétique  $\mathbf{B}$  et on montre que l'on peut se ramener à étudier le cas où  $\mathbf{B}$  a toutes ses composantes positives. On étudie aussi la régularité du bas du spectre, on montre en particulier que

$$\tau \longmapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Dans le cas  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$  d'un champ tangent à l'arête du dièdre, on a  $s(\mathbf{B}; \alpha) = \mu(\alpha)$  où la fonction  $\alpha \mapsto \mu(\alpha)$  est le bas du spectre de l'opérateur modèle de Schrödinger avec champ magnétique constant sur un secteur angulaire :

$$(-i\partial_{x_1})^2 + (-i\partial_{x_2} - x_1)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha$$

présenté plus haut. On a vu que dans le cas du demi-espace, le bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant unitaire est strictement croissant par rapport à l'angle  $\theta$  que fait le champ avec le bord du demi-espace. En particulier le bas du spectre est minimal quand le champ est tangent au bord du demi-espace, et sa valeur est  $\Theta_0$ . Dans le cas d'un dièdre d'angle  $\alpha$ , on peut se demander si le bas du spectre est minimal pour un champ magnétique  $\mathbf{B}$  tangent à l'arête du dièdre (auquel cas le bas du spectre vaut  $\mu(\alpha)$ ). Autrement dit quand a-t-on l'inégalité

$$\mu(\alpha) \leq s(\mathbf{B}; \alpha)? \quad (19)$$

Pan montre que cette inégalité est vraie dans le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  pour un champ contenu dans une des faces du dièdre. Dans la section 3.4, nous donnons des conditions sur le champ magnétique et l'angle  $\alpha$  pour que ce résultat reste vrai. On montre en particulier qu'il est vrai pour tout  $\alpha$  si le champ magnétique vaut  $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$ , c'est-à-dire s'il est perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre. On montre aussi que pour  $b_2 > 0$  fixé et  $\alpha$  assez petit, l'inégalité (19) est vraie.

Dans le chapitre 4, nous caractérisons le spectre essentiel de l'opérateur sur le secteur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . On trouve une condition géométrique discriminante. On introduit la droite  $\Upsilon$  d'équation  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = 0$  et on note  $(\gamma, \theta)$  les coordonnées sphériques du champ magnétique  $\mathbf{B}$  (voir la figure 3.1). On définit la terminologie suivante :

- On dit que la droite  $\Upsilon$  vérifie la condition de la droite sortante si  $\theta \in [0, \frac{\pi-\alpha}{2})$  (voir la figure 3.4). Dans ce cas-là l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est à résolvante compacte.
- On dit que la droite  $\Upsilon$  vérifie la condition de la droite entrante si  $\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (voir la figure 3.6). Dans ce cas-là le spectre essentiel de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  vaut  $[1, +\infty)$ .
- On dit que la droite  $\Upsilon$  vérifie la condition de la droite tangente si  $\theta = \frac{\pi-\alpha}{2}$  (voir la figure 3.5). Dans ce cas-là le spectre essentiel  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  dépend des paramètres. Il est décrit par la proposition 4.15.

Dans les trois cas, le lemme de Persson et une comparaison à des opérateurs modèles sur des domaines réguliers permettent de trouver le spectre essentiel.

On obtient aussi grâce à cette étude le théorème 4.21 : dans le cas où le champ est perpendiculaire à l'arête du dièdre et contenu dans une des faces du dièdre, on a pour  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \Theta_0 .$$

On généralise ainsi le résultat de Pan ([Pan02]) pour le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Il est remarquable que ce résultat ne soit plus vrai pour des angles d'ouverture petits : plus précisément nous montrons dans le chapitre 6 que pour un champ magnétique contenu dans une des faces du dièdre et  $\alpha$  assez petit, on a

$$s(\mathbf{B}; \alpha) < \Theta_0 .$$

Nous essayons dans la suite de la thèse de répondre à certaines problématiques :

- Nous cherchons une majoration pour  $s(\mathbf{B}; \alpha)$ . Peut-on comparer  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  aux valeurs propres associées aux autres problèmes modèles que sont  $\Theta_0$  et  $\mu(\alpha)$  ?
- La borne inférieure sur  $\tau \in \mathbb{R}$  des  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est-elle atteinte ? Si oui, nous notons  $\tau_*$  un minimiseur de la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$ . Il sera intéressant de savoir si la quantité  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau_*)$  est une valeur propre pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau_*}$ . Cette problématique trouve son intérêt dans la construction de quasi-mode pour l'opérateur de Schrödinger magnétique semi-classique sur un domaine borné : en effet la donnée d'un vecteur propre pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau_*}$  fournit un quasi-mode pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \Omega, h}$  d'après la procédure vue dans la sous-section 0.2.1.

Pour le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , Pan montre que la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  admet un minimum, et ce quel que soit le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . La démonstration repose en grande partie sur des propriétés de symétrie du dièdre  $\mathcal{D}_{\frac{\pi}{2}}$  qui permettent d'utiliser la condition de Neumann

pour se ramener à un problème sur le plan. Ces méthodes ne se généralisent pas au cas  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ . Nous utilisons la continuité de  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  : pour savoir si la borne inférieure de cette fonction est atteinte, il faut d'abord calculer les limites de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  quand  $|\tau|$  est grand.

Dans le chapitre 5, nous faisons tendre le paramètre de Fourier  $\tau$  vers  $-\infty$  et  $+\infty$ . Ceci nous fournira une majoration pour la quantité  $s(\mathbf{B}; \alpha)$ . On rappelle que la fonction  $\sigma_1$  a été introduite en (13) et on définit pour  $b \in (0, 1]$  la fonction

$$\sigma_1^{\text{aux}}(b) := \sigma_1(\arcsin b). \quad (20)$$

On montre que la limite de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  quand  $|\tau|$  tend vers  $+\infty$  est soit  $+\infty$ , soit un  $\sigma_1^{\text{aux}}(b)$  où  $b$  est une quantité qui dépend du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et de l'angle  $\alpha$ . Le tableau 5.1 donne de manière explicite (en utilisant la fonction  $\sigma_1^{\text{aux}}$ ) la valeur de cette limite. Nous avons donc dans ce chapitre généralisé et amélioré les résultats obtenus par Pan dans le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . On constate que dans tous les cas, la limite est supérieure à  $\Theta_0$ .

### 0.3.3 Troisième partie : étude asymptotique pour les angles petits

Nous cherchons des majorations des valeurs propres  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  pour répondre aux problématiques soulevées plus haut. Nous cherchons en particulier des valeurs de  $\tau$  pour lesquelles  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est inférieure à  $\Theta_0$  : on aura ainsi l'existence d'un minimiseur de la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$ . On déduira en outre une majoration de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  qui nous permettra de comparer le problème modèle à ceux décrits dans le cas d'un domaine régulier.

Dans cette optique, nous étudions l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, S_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  sur le secteur d'ouverture  $\alpha$  avec  $\alpha$  petit. On s'attend à pouvoir comparer l'opérateur sur le secteur avec un opérateur modèle unidimensionnel. Dans le cas du champ tangent à l'arête  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ , on a

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, 0) = \mu(\alpha).$$

Les travaux de Bonnaillie-Noël ([Bon05]) montrent alors que

$$\mu(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Le point clef est la comparaison de l'opérateur en coordonnées polaires avec un opérateur singulier unidimensionnel. Des techniques semi-classiques permettent ensuite de montrer le résultat et de l'affiner en un développement asymptotique à tout ordre en puissances de  $\alpha$  de la première paire propre (ces résultats sont rappelés dans la section 3.2).

Pour un champ magnétique non tangent à l'arête  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$  deux cas peuvent se produire :

- Si  $b_2 \neq 0$ , on note que pour  $\alpha$  assez petit, la droite  $\Upsilon$  d'annulation du potentiel  $V_{\mathbf{B}, \tau}$  est sortante, et l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, S_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  est à résolvante compacte pour toute valeur de  $\tau$  d'après la proposition 4.10.

- Si  $b_2 = 0$ , la droite  $\Upsilon$  est entrante dans le secteur pour toute valeur de l'angle  $\alpha$ . L'opérateur  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{B}, \tau}$  a du spectre essentiel et celui-ci vaut  $[1, +\infty)$  d'après la proposition 4.14.

Des changements de variables associés aux coordonnées polaires et à un choix de jauge adéquat nous amènent à considérer l'opérateur dans les variables polaires du secteur  $(r, \phi)$ . La mise à l'échelle de la coordonnée angulaire fournie par  $\eta := \frac{\phi}{\alpha}$  permet de se ramener à l'opérateur associé à la forme quadratique

$$\mathcal{Q}_{\underline{B}, \tau}^{\text{pol}}(u) := \int_{\Omega_0} \left( |(\partial_r - i\alpha r \eta b_3)u|^2 + \frac{1}{\alpha^2 r^2} |\partial_\eta u|^2 + V_{\underline{B}, \tau}^{\text{pol}} |u|^2 \right) r \, dr \, d\eta \quad (21)$$

où le potentiel dans les nouvelles coordonnées est :

$$V_{\underline{B}, \tau}^{\text{pol}}(r, \eta) := (r \cos(\eta\alpha) b_2 - r \sin(\eta\alpha) b_1 - \tau)^2, \quad (22)$$

et l'ouvert  $\Omega_0$  est la bande semi-infinie  $(r, \eta) \in \mathbb{R}_+ \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Comme dans [Bon05], nous éliminons le terme singulier en  $\frac{1}{\alpha^2}$  en nous restreignant aux fonctions de  $\Omega_0$  ne dépendant pas de la variable  $\eta$ .

Dans le chapitre 6, on considère le cas  $b_2 \neq 0$ . En faisant formellement  $\alpha = 0$  dans la forme quadratique définie en (21), on obtient l'opérateur de Sturm-Liouville (noté  $\mathfrak{L}_\tau$ ) dont le potentiel dépend du paramètre  $\tau$  :

$$\mathfrak{L}_\tau := -\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r + (r - \tau)^2, \quad r \in \mathbb{R}_+ \quad (23)$$

défini sur l'espace des fonctions de la variable  $r > 0$  muni de la mesure à poids  $r \, dr$ . Des opérateurs de ce type sont étudiés dans [BC72]. Nous notons  $\zeta_1(\tau)$  le bas du spectre de cet opérateur et nous montrons des propriétés de  $\zeta_1$  analogues à celles de la première valeur propre  $\mu_1^N(\tau)$  de  $\mathfrak{h}_\tau^N$  (cf chapitre 1). Nous montrons que  $\zeta_1(\tau)$  est une valeur propre simple de  $\mathfrak{L}_\tau$ . Il est élémentaire que  $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \zeta_1(\tau) = +\infty$ . Lorsque  $\tau$  tend vers  $+\infty$ , l'analyse semi-classique fournit l'asymptotique suivante (cf la proposition 6.11) :

$$\zeta_1(\tau) \underset{\tau \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right).$$

Nous montrons en utilisant des quasi-modes gaussiens bien choisis que  $\tau \mapsto \zeta_1(\tau)$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$  :

$$\Xi_0 := \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \zeta_1(\tau),$$

de plus nous avons

$$\Xi_0 \leq \sqrt{4 - \pi}.$$

Nous calculons la dérivée de la fonction  $\zeta_1$  à l'aide des techniques de [DH93b] (voir la proposition 6.22). La relation (6.48) ne permet pas de déterminer la monotonie de  $\zeta_1$  mais fournit une comparaison entre  $\Xi_0$  et la constante  $\Theta_0$  définie comme le minimum de la fonction  $\mu_1^N$  :

$$\Theta_0 < \Xi_0.$$

Une approximation par éléments finis fournit la valeur approchée

$$\Xi_0 \approx 0.8630 ,$$

de plus cette valeur semble être atteinte en un unique minimum de la fonction  $\zeta_1$  (voir la figure 6.4).

En utilisant une fonction propre de l'opérateur  $\mathbf{I}_\tau$  associée à la valeur  $\Xi_0$ , on montre pour un champ  $\mathbf{B}$  avec  $b_2 > 0$  le théorème 6.29 :

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0} s(\mathbf{B}; \alpha) \leq \Xi_0 b_2 .$$

On déduit aussi du théorème 6.29 que pour  $b_2$  et  $\alpha$  assez petits, on a

$$s(\mathbf{B}; \alpha) < \Theta_0 .$$

En utilisant les quasi-modes construits pour l'opérateur  $\mathbf{I}_\tau$ , on construit des quasi-modes pour l'opérateur sur le secteur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  et on obtient grâce à (18) une majoration analytique de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  (voir le corollaire 6.32). Pour  $\alpha$  petit, le majorant est inférieur aux valeurs limites de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  calculées pour  $\tau$  grand. On déduit le théorème 6.35 : pour  $b_2 > 0$  fixé il existe  $\alpha_m(\mathbf{B}) > 0$  tel que pour  $\alpha \in (0, \alpha_m(\mathbf{B}))$ , la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  atteint son infimum. De plus le lemme 6.34 fournit une minoration pour la valeur  $\alpha_m$ . Pour  $b_2 = 1$ , c'est-à-dire pour le champ magnétique  $\mathbf{B} := (0, 1, 0)$  perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre, on trouve  $\alpha_m(\mathbf{B}) \geq 1.2035$ .

Nous réalisons des simulations numériques pour trouver des valeurs approchées de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$ . Ces calculs donnent une forte présomption pour que la limite de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 0 soit effectivement  $\Xi_0 b_2$  (voir la conjecture 6.30). On constate grâce à ces calculs que la monotonie de la fonction  $\alpha \mapsto s(\mathbf{B}; \alpha)$  semble dépendre du champ  $\mathbf{B}$ .

Dans le chapitre 7, nous étudions le cas  $b_2 = 0$ . Le champ magnétique est alors de la forme

$$\mathbf{B} = (\sin \gamma, 0, \cos \gamma) ,$$

il est contenu dans le plan bissecteur du dièdre. On commence par montrer que pour  $\tau \neq 0$  fixé, on a

$$\liminf_{\alpha \rightarrow 0} \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) > 0 .$$

On construit un quasi-mode pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, 0}$  (c'est-à-dire pour le cas  $\tau = 0$  où la droite  $\Upsilon$  est confondue avec la bissectrice du secteur  $S_\alpha$ ). On utilise la fonction

$$(x_1, x_2) \mapsto e^{-\alpha(x_1^2 + x_2^2)/4\sqrt{3}}$$

et on obtient

$$\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, 0) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}b_3^2}{120}\alpha^3 . \quad (24)$$

Nous décrivons les conséquences de cette majoration à l'aide de la relation (18). On a

$$s(\mathbf{B}; \alpha) \leq \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, 0)$$

et donc  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  tend vers 0 quand  $\alpha$  tend vers 0. Comme les limites de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  quand  $|\tau|$  tend vers  $+\infty$  sont strictement positives (voir le chapitre 5), on déduit que la borne inférieure de  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est atteinte pour  $\alpha$  assez petit. On note  $\tau(\alpha)$  un minimiseur de cette fonction. On a donc

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau(\alpha)) .$$

Puisque le bas du spectre essentiel de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  vaut 1 pour tout réel  $\tau$ , la valeur  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  correspond à du spectre discret pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau(\alpha)}$  si  $\alpha$  est assez petit. De plus la majoration (24) montre que cette valeur propre est strictement inférieure à  $\Theta_0$  dès que  $\alpha < 0.9972$ .

Dans la suite du chapitre nous étudions le cas particulier  $\tau = 0$  pour lequel la droite  $\Upsilon$  est confondue avec la bissectrice du secteur. Nous rappelons que  $(r, \eta) \in (0, +\infty) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  désigne les coordonnées polaires normalisées du secteur  $S_\alpha$ . Comme dans [Bon05], on réalise le changement de variable semi-classique  $t = \frac{\alpha r^2}{2}$  dans la forme quadratique définie en (6.1). Nous développons le nouvel opérateur en puissances de  $\alpha$ . En adaptant les techniques de [Bon05], nous montrons une asymptotique à tout ordre de la première paire propre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . On a en particulier :

$$\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, 0) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \left( \frac{21b_3^2 + 2}{35\sqrt{3}} + \frac{b_1^2}{20\sqrt{3}} \right) \alpha^3 + O(\alpha^5) .$$

Le premier terme  $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$  ne dépend pas de  $\mathbf{B}$  et on retrouve le premier terme de l'asymptotique connue pour un champ tangent à l'arête ( $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ ). On remarque que le deuxième terme est croissant par rapport à l'angle  $\gamma$  que fait le champ magnétique avec l'arête du dièdre. On construit un quasi-mode d'ordre 2, noté  $u_\alpha^{\gamma,1}$ , de la forme

$$u_\alpha^{\gamma,1}(t, \eta) = e^{-\frac{t}{2\sqrt{3}}} (1 + \alpha^2 P(t, \eta))$$

où  $P$  est un polynôme à valeurs complexes explicite en  $t$  et  $\eta$ . On déduit du théorème spectral que ce quasi-mode est proche du vecteur propre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, 0}$ .

Ces développements asymptotiques généralisent ceux de Bonnaillie-Noël (correspondant au cas  $\gamma = 0$ ). On trouve que pour  $\gamma$  assez petit, le quasi-mode  $u_\alpha^{\gamma,1}$  s'annule en un unique point de la droite  $\{\eta = 0\}$  (c'est-à-dire  $\{x_2 = 0\}$  dans les coordonnées cartésiennes). Nous donnons une asymptotique des coordonnées de ce point d'annulation quand  $\alpha$  tend vers 0.

Nous comparons le quasi-mode à deux termes  $u_\alpha^{\gamma,1}$  avec les vecteurs propres calculés numériquement : nous calculons à l'aide de la librairie d'éléments finis MELINA les paires propres de l'opérateur  $(-i\partial_{x_1} - x_2 \cos \gamma)^2 + (-i\partial_{x_2})^2 + x_2^2 \sin^2 \gamma$ ,  $(x_1, x_2) \in S_\alpha$  pour différentes valeurs de  $\gamma$  et de  $\alpha$ . Nous constatons que le vecteur propre calculé par éléments finis a des points d'annulation sur la bissectrice du secteur  $\{\eta = 0\}$  pour  $\alpha$  et  $\gamma$  assez petits. Ils se distinguent clairement sur les simulations numériques comme étant des singularités de la phase. Nous comparons le point d'annulation le plus proche de l'origine avec le zéro du quasi-mode à deux termes  $u_\alpha^{\gamma,1}$ . Ces deux zéros coïncident pour  $\alpha$  dans un certain régime :  $\alpha$  doit être petit mais pas trop proche de 0.



### 0.3.4 Quatrième partie : application aux lentilles magnétiques

Dans cette partie nous appliquons nos résultats à l'étude de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique semi-classique  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  sur un domaine diédral borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  d'un type particulier que nous appelons "lentille". Nous faisons dans un premier temps l'hypothèse que le domaine  $\Omega$  est convexe et possède une arête courbe  $\Gamma$ , dont nous supposons l'angle d'ouverture constant et de valeur  $\alpha$ . On fait l'hypothèse que l'arête courbe est contenue dans un plan noté  $\Pi$  et détermine un domaine  $\omega \in \Pi$  régulier, de plus la lentille est supposée symétrique par rapport au plan  $\Pi$ . Un exemple en est un domaine délimité par deux portions de sphère accolées l'une à l'autre (cf la figure 8.1). Nous supposons dans les sections 8.1 à 8.3 que la lentille est soumise à un champ magnétique  $\mathbf{B}$  constant unitaire perpendiculaire au plan  $\Pi$ .

Pour un voisinage d'un point situé sur l'arête, le domaine modèle associé est un dièdre d'ouverture  $\alpha$  soumis à un champ magnétique perpendiculaire à son plan bissecteur. Dans les coordonnées locales qui permettent de se ramener au dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  le champ magnétique devient  $\tilde{\mathbf{B}} = (0, 1, 0)$ . Nous notons  $\nu(\alpha)$  la valeur propre associée à l'opérateur de Schrödinger magnétique sur ce domaine modèle. En reprenant les notations du chapitre 3, nous avons

$$\nu(\alpha) = s(\tilde{\mathbf{B}}; \alpha) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{s}(\tilde{\mathbf{B}}; \alpha, \tau) .$$

Nous notons  $\beta(y)$  l'angle que fait le champ magnétique  $\mathbf{B}$  avec le bord de  $\Omega$  en un point  $y$  de  $\partial\Omega$  en dehors de l'arête. Le domaine modèle associé est un demi-espace soumis à un champ magnétique faisant un angle  $\beta(y)$  avec le bord, et la valeur propre de l'opérateur associé est  $\sigma_1(\beta(y))$ . Nous faisons l'hypothèse que  $\beta(y) \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Comme la fonction  $\sigma_1(\beta)$  est croissante avec l'angle  $\beta$ , le bas du spectre de l'opérateur modèle près d'un point du bord régulier est minoré par  $\sigma_1(\frac{\pi-\alpha}{2})$ . Or on a montré au théorème 5.4 que

$$\liminf_{\tau \rightarrow \pm\infty} \underline{s}(\tilde{\mathbf{B}}; \alpha, \tau) = \sigma_1\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) .$$

Ainsi comparer les problèmes modèles près d'une partie régulière du bord et près d'un point de l'arête revient à prouver  $\inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{s}(\tilde{\mathbf{B}}; \alpha, \tau) < \liminf_{\tau \rightarrow \pm\infty} \underline{s}(\tilde{\mathbf{B}}; \alpha, \tau)$ . Les résultats du chapitre 6 permettent d'affirmer que pour  $\alpha$  assez petit, on a

$$\nu(\alpha) < \sigma_1\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) . \quad (25)$$

Le théorème 8.12 décrit le comportement de la valeur propre  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  quand  $h$  tend vers 0 : pour  $\alpha \in (0, \alpha_m(\tilde{\mathbf{B}}))$ , on a

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = h\nu(\alpha) + O(h^{5/4}) ,$$

où  $\alpha_m(\tilde{\mathbf{B}})$  est défini en (6.69), de plus le corollaire 6.34 fournit  $\alpha_m(\tilde{\mathbf{B}}) > 1.2035$ . Par contre, les hypothèses faites ne permettent pas de démontrer une localisation plus précise pour les vecteurs propres. Notons que cette asymptotique montre que la première valeur propre  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  est plus élevée dans ce cas là que dans le cas d'un ouvert régulier (voir le théorème 0.3).



Nous appliquons ensuite à deux autres problèmes les résultats obtenus dans l'étude des problèmes sur le dièdre. Dans la section 8.4, nous étudions une lentille dont l'angle d'ouverture est variable. Nous supposons toujours que l'arête est contenue dans le plan  $\Pi$  et que la lentille est symétrique par rapport à ce plan. Nous paramétrons l'arête  $\Gamma$  de la lentille par une abscisse curviligne  $s \in I \mapsto y(s) \in \Gamma$ , et nous notons  $\alpha(s)$  l'angle d'ouverture de l'arête en un point  $y(s)$  de  $\Gamma$ . Nous supposons que la fonction  $s \mapsto \alpha(s)$  est régulière et nous notons  $\alpha_0$  son maximum. Nous démontrons (en collaboration avec N.Raymond) que la fonction  $\alpha \mapsto \nu(\alpha)$  est décroissante sur  $(0, \pi)$ . Nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\inf_{s \in I} \nu(\alpha(s)) < \inf_{y \in \partial\Omega \setminus \Gamma} \sigma_1(\beta(y))$$

où  $\beta(y)$  est encore l'angle que fait le champ magnétique avec le bord régulier de  $\Omega$  en un point  $y$ . Noter que cette hypothèse est satisfaite si la lentille d'angle variable est une petite perturbation d'une lentille d'angle fixe telle que (25) soit vérifiée. En utilisant la décroissance de  $\alpha \mapsto \nu(\alpha)$ , on obtient l'asymptotique suivante :

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = h\nu(\alpha_0) + O(h^{5/4}).$$

Dans la section 8.5, nous revenons au cas d'une lentille d'angle d'ouverture fixe et nous traitons le cas où le champ magnétique est tangent au plan  $\Pi$  qui contient l'arête  $\Gamma$ . Dans ce cas-là l'ensemble des points où le champ magnétique est tangent au bord régulier de la lentille est non vide. Le bas du spectre de l'opérateur modèle associé près de ces points vaut  $\Theta_0$ . Pour un point  $y \in \Gamma$  de l'arête, nous notons  $\gamma$  l'angle que fait le champ magnétique avec l'arête au point  $y$ . Le problème modèle associé à ce point  $y$  est un dièdre d'angle  $\alpha$  avec un champ magnétique  $\mathbf{B}$  contenu dans le plan bissecteur du dièdre et faisant un angle  $\gamma$  avec l'arête du dièdre et le bas du spectre de cet opérateur modèle est  $s(\gamma, \frac{\pi}{2}; \alpha)$ . Nous avons prouvé au corollaire 7.7 que pour tout  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , la valeur  $s(\gamma, \frac{\pi}{2}; \alpha)$  est strictement inférieure à  $\Theta_0$  dès que  $\alpha < 0.9972$ . Nous montrons que pour un champ magnétique  $\mathbf{B}$  contenu dans le plan de l'arête et pour un angle d'ouverture  $\alpha$  assez petit, la valeur propre  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  admet l'asymptotique suivante :

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = h\kappa^{\min}(\alpha) + O(h^{5/4})$$

avec  $\kappa^{\min}(\alpha) := \inf_{\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]} s(\gamma, \frac{\pi}{2}; \alpha)$ .

Ce résultat peut être comparé à l'asymptotique de la première valeur propre de l'opérateur avec champ magnétique constant sur un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^3$  prouvée dans [HM04] et présentée dans le théorème 0.3 : la première valeur propre de l'opérateur sur la lentille est inférieure à celle correspondant au cas régulier pour ce choix du champ magnétique et pour  $\alpha$  assez petit. De plus, dans le cas régulier ce sont des effets de courbure qui créent la localisation des vecteurs propres alors qu'ici on s'attend à ce que les vecteurs propres se localisent le long de l'arête. En nous appuyant sur les résultats du chapitre 7, nous conjecturons que la localisation a lieu près des points où le champ magnétique est tangent à l'arête.

Nous donnons finalement un énoncé pour un cas plus général : étant donné un champ magnétique  $\mathbf{B}$  unitaire constant, nous exhibons des conditions géométriques (voir le théorème 8.19) sous lesquelles la première valeur propre  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  est strictement inférieure à

$h\Theta_0$  pour  $h$  assez petit, autrement dit nous donnons des conditions suffisantes pour que l'arête courbe génère une valeur propre strictement inférieure à la valeur correspondant au cas régulier.

## 0.4 Récapitulatif des principaux opérateurs rencontrés

Nous présentons ici les opérateurs rencontrés au long de cette thèse et plus généralement dans l'étude de l'opérateur de Schrödinger semi-classique avec champ magnétique. Dans la table 1 nous présentons les opérateurs en dimension 1 sur la droite et la demi-droite. Dans la table 2 on trouve les opérateurs intervenant sur les domaines modèles de  $\mathbb{R}^2$  que sont le demi-plan et le secteur infini. Dans la table 3 nous donnons les notations pour les opérateurs de Schrödinger magnétique dans des ouverts de  $\mathbb{R}^3$ . Enfin la table 4 présente les opérateurs dits “modèles” : ce sont des opérateurs étudiés en détails qui interviennent dans l'étude de l'opérateur de Schrödinger magnétique. Nous indiquons des liens entre le bas du spectre de ces opérateurs modèles et la constante fondamentale  $\Theta_0$ .

Notation	Opérateur unidimensionnel	Nom	Domaine	Forme quadratique	Valeurs propres $k \geq 1$
$\mathfrak{h}$	$-\partial_t^2 + t^2$	Oscillateur harmonique	$\mathbb{R}$	$\mathfrak{q}$	$2k - 1$
$\mathfrak{h}_\tau^N$	$-\partial_t^2 + (t - \tau)^2$	Opérateur de de Gennes	$\mathbb{R}_+$	$\mathfrak{q}_\tau^N$	$\mu_k^N(\tau)$
$\mathfrak{l}$	$-2\partial_t t \partial_t + 2t$	Opérateur de Laguerre	$\mathbb{R}_+$	—————	$4k - 2$
$\mathfrak{l}_\tau$	$-\partial_\rho^2 - \frac{1}{\rho} \partial_\rho + (\rho - \tau)^2$	—————	$\mathbb{R}_+$ muni du poids $\rho d\rho$	$\mathfrak{q}_\tau$	$\zeta_k(\tau)$

TABLE 1 – Les opérateurs en dimension 1.

Notation	Paramètres	Opérateur en dimension 2	Forme quadratique	Bas du spectre
$\mathcal{L}_\theta$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$	$-\Delta + (t \cos \theta - s \sin \theta)^2,$ $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$	$q_\theta$	$\sigma_1(\theta)$
$P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha}$ $\text{rot } \underline{\mathbf{A}}^{\mathbf{S}} = 1$	$\alpha \in (0, \pi)$	$(-i\partial_{x_1} + \frac{x_2}{2})^2 + (-i\partial_{x_2} - \frac{x_1}{2})^2,$ $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha$	—————	$\mu(\alpha)$
$P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ $\text{rot } \underline{\mathbf{A}} = b_3$ $\underline{\mathbf{B}} = (b_1, b_2)$	$\underline{\mathbf{B}} = (b_1, b_2, b_3),$ $\tau \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, \pi)$	$-(\nabla - i\underline{\mathbf{A}})^2 + (x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau)^2,$ $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha$	$\mathcal{Q}_\tau$	$\underline{s}(\underline{\mathbf{B}}; \alpha, \tau)$
$P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ $\underline{\mathbf{A}} = 0$ $\underline{\mathbf{B}} = (0, 1)$	$\tau \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, \pi)$	$-\Delta + (x_1 - \tau)^2, (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha$	$\mathcal{Q}_\tau$	$\underline{\nu}(\alpha, \tau)$

TABLE 2 – Les opérateurs en dimension 2.

Notation	Opérateur en dimension 3	Domaine	Bas du spectre
$P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$	$-(h\nabla - i\mathbf{A})^2$	$\Omega$	$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$
$P_{\mathbf{A}, \Omega}$	$-(\nabla - i\mathbf{A})^2$	$\Omega$	$\lambda(\mathbf{B}; \Omega)$
$P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$	$-(\nabla - i\mathbf{A})^2$	$\mathcal{D}_\alpha$	$s(\mathbf{B}; \alpha)$

TABLE 3 – Les opérateurs en dimension 3.

Opérateur modèle	Domaine	Première paire propre	Lien avec $\Theta_0$	Spectre essentiel
$\mathfrak{h}_\tau^N$ (cf. table 1)	$\mathbb{R}_+$	$(\mu_1^N(\tau), u_\tau^N)$	$\inf \mu_1^N(\tau) = \Theta_0$	$\emptyset$
$\mathfrak{l}_\tau$ (cf. table 1)	$\mathbb{R}_+$ muni du poids $\rho \, d\rho$	$(\zeta_1(\tau), z_\tau)$	$\inf \zeta_1(\tau) = \Xi_0 > \Theta_0$	$\emptyset$
$\mathcal{L}_\theta$ (cf. table 2)	$\mathbb{R}_+^2$	$(\sigma_1(\theta), u_\theta)$	$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sigma_1(\theta) = \Theta_0$	$[1, +\infty)$
$P_{\mathbf{A}^S, \mathcal{S}_\alpha}$ $\text{rot } \mathbf{A}^S = 1$ (cf. table 2)	$\mathcal{S}_\alpha$	$(\mu(\alpha), U_\alpha)$	$\mu(\pi) = \Theta_0$	$[\Theta_0, +\infty)$

TABLE 4 – Opérateurs modèles sur la demi-droite, le demi-plan et le secteur, leur première paire propre ainsi que leurs liens avec la constante  $\Theta_0$ .



# **Rappels de théorie spectrale**



# Chapitre A

## Rappels sur le bas du spectre d'un opérateur auto-adjoint

Dans ce qui suit  $H$  désignera un espace de Hilbert. Si  $P$  est un opérateur auto-adjoint, nous noterons  $\mathfrak{S}(P)$  son spectre et  $\mathfrak{S}_{\text{ess}}(P)$  son spectre essentiel. Le bas du spectre d'un opérateur  $P$  est défini comme la borne inférieure de  $\mathfrak{S}(P)$ . Nous rappelons ici des résultats sur un opérateur auto-adjoint permettant de faire des estimations sur le bas de son spectre. Ces estimations permettent également de prouver l'existence de valeurs propres pour un opérateur dans un intervalle donné.

Le principe du min-max permet de relier les quotients de Rayleigh d'un opérateur auto-adjoint avec ses plus petites valeurs propres (voir [RS78, Théorème XIII.1], [Sch91, p. 75]) :

**Proposition A.1** (Principe du min-max). *Soit  $P$  un opérateur auto-adjoint borné inférieurement,  $q$  sa forme quadratique et  $\text{Dom}(q)$  son domaine de forme. Définissons le  $n$ -ième quotient de Rayleigh comme*

$$\mu_n = \sup_{\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1} \in \text{Dom}(q)} \inf_{\substack{\Psi \in [\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}]^\perp \\ \Psi \in \text{Dom}(q) \setminus \{0\}}} \frac{q(\Psi)}{\|\Psi\|_H^2} = \inf_{\Psi_1, \dots, \Psi_n \in \text{Dom}(q)} \sup_{\Psi \in [\Psi_1, \dots, \Psi_n]} \frac{q(\Psi)}{\|\Psi\|_H^2}. \quad (\text{A.1})$$

Alors à  $n$  fixé, on a l'alternative (a) ou (b) :

- (a) *L'opérateur  $P$  a au moins  $n$  valeurs propres (comptées avec multiplicité) sous son spectre essentiel et  $\mu_n$  est la  $n$ -ième valeur propre comptée avec multiplicité ;*
- (b)  *$\mu_n$  est le bas du spectre essentiel de  $P$  et dans ce cas  $\mu_n = \mu_{n+1} = \dots$  et  $P$  a au plus  $n - 1$  valeurs propres (comptées avec multiplicité) sous  $\mu_n$ .*

Les fonctions que nous construirons pour minimiser les quotients de Rayleigh seront appelés des "quasi-modes". Il est à remarquer que ces fonctions n'ont pas besoin d'être dans le domaine de l'opérateur, mais seulement dans son domaine de forme. Le théorème suivant donne une estimation plus précise si la fonction test est dans le domaine de l'opérateur :

**Théorème A.2** (Théorème spectral). *Soit  $P$  un opérateur auto-adjoint borné inférieurement*



et soit  $\text{Dom}(P) \subset H$  son domaine. Soit  $\mathfrak{S}(P)$  son spectre. Alors on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \psi \in \text{Dom}(P), \quad \text{dist}(\lambda, \mathfrak{S}(P)) \leq \frac{\|(P - \lambda)\psi\|_H}{\|\psi\|_H}. \quad (\text{A.2})$$

L'inégalité de Temple permet d'être plus précis si l'on connaît un écart entre des valeurs propres (voir [Har80] par exemple) :

**Proposition A.3** (Inégalité de Temple). *Soit  $P$  un opérateur auto-adjoint et soit  $q$  sa forme quadratique. Soit  $\psi \in \text{Dom}(P)$  une fonction normalisée. Soit  $\eta = q(\psi)$  son énergie et  $\epsilon = \|(P - \eta)\psi\|_H$ . Supposons que  $\lambda$  soit la seule valeur propre de  $P$  dans l'intervalle  $I := (\alpha, \beta)$ . Si  $\epsilon^2 < (\beta - \eta)(\eta - \alpha)$ , alors on a*

$$\eta - \frac{\epsilon^2}{\beta - \eta} < \lambda < \eta + \frac{\epsilon^2}{\eta - \alpha}. \quad (\text{A.3})$$

Pour une valeur propre donnée, nous aurons besoin d'informations sur la régularité du vecteur propre associé. Le résultat général suivant répond à la question quand le domaine est convexe (voir par exemple [Gri76]) :

**Proposition A.4** (Régularité elliptique dans les domaines convexes). *Soit  $P$  un opérateur différentiel autoadjoint d'ordre 2 dont le symbole principale est elliptique. Nous faisons l'hypothèse que  $\Omega$  est convexe. Alors les vecteurs propres de  $P$  sont dans  $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ .*

Nous serons amenés à considérer des opérateurs à paramètres, en particulier nous allons étudier la dépendance des valeurs propres par rapport aux paramètres. La proposition suivante décrit la régularité du bas du spectre, elle est issue de [IZ88], la méthode est une variante de la méthode de Grushin ([Gru72]), aussi appelée “projection de Feshbach”.

**Proposition A.5** (Formule de Feynman-Hellmann). *Soit  $(P(\zeta))_{\zeta} \in \mathbb{R}$  une famille d'opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert dont le domaine ne dépend pas de  $\zeta$ . Nous supposons que cette famille est différentiable par rapport au paramètre  $\zeta$  et nous notons  $\partial_{\zeta} P(\zeta)$  sa différentielle. Nous notons  $\mu(\zeta)$  le bas du spectre de  $P(\zeta)$ . Nous supposons qu'en  $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\mu(\zeta_0)$  est une valeur propre simple de  $P(\zeta_0)$ , et nous notons  $u_{\zeta_0}$  un vecteur propre associé. Alors il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $\zeta \in (\zeta_0 - \eta, \zeta_0 + \eta)$  et pour tout  $\mu \in (\mu(\zeta_0) - \eta, \mu(\zeta_0) + \eta)$  :*

$$\mu \in \mathfrak{S}(P(\zeta)) \iff \mu = \mu(\zeta),$$

où  $\mu \in C^{\infty}((\zeta_0 - \eta, \zeta_0 + \eta))$  est une fonction. Le vecteur propre associé  $u_{\zeta}$  est également régulier dans un voisinage de  $\zeta_0$ . On a de plus la formule de Feynman-Hellmann :

$$\mu'(\zeta_0) = \langle u_{\zeta_0}, \partial_{\zeta} P(\zeta_0) u_{\zeta_0} \rangle. \quad (\text{A.4})$$

# Chapitre B

## Rappels sur l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique

### B.1 Définition de l'opérateur en dimension 3

Soit  $\Omega$  un ouvert lipschitzien simplement connexe inclus dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{B}$  un champ magnétique. Soit  $\mathbf{A}$  un potentiel vecteur (appelé potentiel magnétique) vérifiant  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Nous définissons la forme quadratique

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{A}}(u) = \int_{\Omega} |(\nabla - i\mathbf{A})u|^2$$

sur le domaine

$$H_{\mathbf{A}}^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), (\nabla - i\mathbf{A})u \in L^2(\Omega)\}. \quad (\text{B.1})$$

Nous notons  $\nabla_{\mathbf{A}} := \nabla - i\mathbf{A}$  le gradient magnétique. La réalisation de Neumann magnétique de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur le domaine  $\Omega$  est définie comme l'extension de Friedrichs de cette forme quadratique. On le note

$$P_{\mathbf{A}, \Omega} = -(\nabla - i\mathbf{A})^2 = \sum_{j=1}^n (D_j - A_j)^2, \quad (\text{B.2})$$

où  $D_j = \frac{1}{i}\partial_j$  est l'opérateur autoadjoint de dérivée partielle et  $A_j$  est la  $j$ -ième composante du potentiel magnétique  $\mathbf{A}$ . Le domaine de cet opérateur est

$$\text{Dom}(P_{\mathbf{A}, \Omega}) := \{u \in H_{\mathbf{A}}^1(\Omega), \nabla_{\mathbf{A}}^2 u \in L^2(\Omega), \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{A}} u|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (\text{B.3})$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$ , définie presque partout si le bord est lipschitzien.

### Un premier exemple de réduction de dimension

Nous allons voir sur un premier exemple comment l'étude spectrale de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega}$  peut se ramener à l'étude d'un opérateur du même type sur un domaine de dimension

2. Nous notons  $(s, t, z) \in \mathbb{R}^3$  les coordonnées cartésiennes de l'espace. Nous supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est un ouvert non borné invariant par translation selon l'axe  $\{z\}$ . Nous notons  $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$  où  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  est la section de  $\Omega$ . Nous faisons l'hypothèse que  $\mathbf{A}$  est de la forme

$$\mathbf{A} = (a_1(s, t), a_2(s, t), 0)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont deux fonctions à valeurs réelles définies sur  $\omega$ . On a

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = (0, 0, \partial_s a_1(s, t) - \partial_t a_2(s, t)) :$$

cette situation correspond à un champ magnétique  $\mathbf{B}$  supporté par l'axe  $\{z\}$  et dont l'intensité ne dépend pas de la variable  $z$ . L'opérateur s'écrit alors

$$P_{\mathbf{A}, \Omega} = (D_s - a_1(s, t))^2 + (D_t - a_2(s, t))^2 + D_z^2 .$$

On rappelle que l'on cherche à déterminer le bas du spectre  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega)$  de cet opérateur. Puisque le domaine est invariant selon l'axe  $\{z\}$ , on peut réaliser une transformation de Fourier partielle par rapport à la variable  $z$  et l'opérateur se décompose en somme directe (voir [RS78]) :

$$P_{\mathbf{A}, \Omega} = \int_{\tau \in \mathbb{R}}^{\oplus} (D_s - a_1(s, t))^2 + (D_t - a_2(s, t))^2 + \tau^2 d\tau .$$

Ainsi pour étudier le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega}$ , nous devons étudier le spectre de l'opérateur  $(D_s - a_1(s, t))^2 + (D_t - a_2(s, t))^2$  agissant sur des fonctions de  $\omega$  (on rappelle que  $\omega$  est la section de  $\Omega$  par le plan  $\{z = 0\}$ ). Introduisons le potentiel magnétique en dimension 2 :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} : \quad \omega &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\mapsto (a_1(s, t), a_2(s, t)) . \end{aligned}$$

On peut alors définir  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \omega}$  comme la réalisation de Neumann de  $(D_s - a_1(s, t))^2 + (D_t - a_2(s, t))^2$  sur la section  $\omega$ . Lorsque  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ , on a alors un lien entre l'opérateur en dimension 3 et l'opérateur réduit sur  $\omega$  :

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega) = \underline{\lambda}(\omega)$$

où  $\underline{\lambda}(\omega)$  désigne le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \omega}$ . Remarquons qu'on peut encore définir le rotationnel de  $\underline{\mathbf{A}}$ , mais il s'agit maintenant d'un champ scalaire. Nous le notons  $\text{rot } \underline{\mathbf{A}}$ . Lorsque qu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous ferons l'amalgame entre  $\text{rot } \underline{\mathbf{A}}$  et  $(0, 0, \text{rot } \underline{\mathbf{A}})$ .

**Remarque B.1.** A l'inverse, si  $\underline{\mathbf{A}}$  est un potentiel vecteur défini sur  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , l'étude du spectre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \omega}$  permet de connaître le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega}$  avec  $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$  et  $\mathbf{A} = (\underline{\mathbf{A}}, 0)$ . Le champ magnétique correspondant est donné par  $\mathbf{B} = (0, 0, \text{rot } \underline{\mathbf{A}})$ .

## B.2 L'opérateur avec champ électrique

Dans l'exemple précédent, une des coordonnées du potentiel magnétique était nulle par hypothèse. Dans les cas que nous étudierons, ceci ne sera pas toujours vrai, et nous serons amenés à regarder des opérateurs de Schrödinger magnétiques avec un potentiel  $V$  (que nous appellerons “potentiel électrique”) sur des domaines de dimension 2.

Définissons maintenant l'opérateur de Schrödinger magnétique avec potentiel électrique. Soit  $\Omega$  un ouvert à bord lipschitzien de  $\mathbb{R}^2$  et  $V$  un potentiel électrique positif sur  $\Omega$ . Comme dans la section précédente, nous partons de la forme quadratique

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{A},V}(u) := \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{A}} u|^2 + |Vu|^2$$

définie sur le domaine de forme

$$H_{\mathbf{A},V}^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla_{\mathbf{A}} u \in L^2(\Omega), \sqrt{V}u \in L^2(\Omega)\}. \quad (\text{B.4})$$

La forme quadratique induit une norme sur ce domaine, c'est pourquoi nous noterons aussi :

$$\|u\|_{H_{\mathbf{A},V}^1}^2 := \mathcal{Q}_{\mathbf{A},V}(u).$$

Comme en dimension 3, son extension est la réalisation de Neumann de

$$P_{\mathbf{A},\Omega} + V = -(\nabla - i\mathbf{A})^2 + V. \quad (\text{B.5})$$

Dans le cas particulier où  $\mathbf{A} = 0$ , nous sommes ramenés à la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec potentiel électrique. Nous le notons  $-\Delta + V$ . La première partie de ce travail est consacrée à des opérateurs de ce type en dimension 1 et 2. Comme nous l'avons vu dans le premier exemple de réduction de dimension, il se pourra aussi que le champ électrique  $V$  soit nul. Dans ce cas on note simplement  $P_{\mathbf{A},\Omega}$  l'opérateur.

## B.3 Transformations unitaires sur l'opérateur et changement de variables

Nous rappelons des propriétés de stabilité du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A},\Omega} + V$ . On commence par une propriété fondamentale qui décrit la dépendance du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A},\Omega} + V$  par rapport au potentiel magnétique  $\mathbf{A}$  :

**Proposition B.2** (Changement de jauge). *Soit  $\phi \in H^2(\Omega)$ . Alors les opérateurs  $P_{\mathbf{A}+\nabla\phi,\Omega} + V$  et  $P_{\mathbf{A},\Omega} + V$  sont unitairement équivalents et ont donc le même spectre. De plus  $u$  est un vecteur propre pour  $P_{\mathbf{A},\Omega} + V$  si et seulement si  $e^{i\phi}u$  est un vecteur propre pour  $P_{\mathbf{A}+\nabla\phi,\Omega} + V$ , et les valeurs propres associées sont identiques.*

Ainsi si  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  sont deux potentiels magnétiques réguliers vérifiant  $\text{rot } \mathbf{A}_1 = \text{rot } \mathbf{A}_2$ , puisque  $\Omega$  est simplement connexe, on sait qu'il existe  $\phi \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$  tel que

$\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = \nabla\phi$ , et les opérateurs  $P_{\mathbf{A}_1, \Omega} + V$  et  $P_{\mathbf{A}_2, \Omega} + V$  sont unitairement équivalents. On peut résumer cette propriété dans l'assertion suivante : si  $\Omega$  et  $V$  sont fixés, le spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega} + V$  ne dépend que du champ magnétique  $\mathbf{B} := \text{rot } \mathbf{A}$ . On remarque cependant que les vecteurs propres associés dépendent du choix du potentiel magnétique  $\mathbf{A}$ .

Réciproquement, étant donné un champ magnétique  $\mathbf{B}$  défini sur  $\Omega$ , on peut choisir un potentiel magnétique vecteur  $\mathbf{A}$  vérifiant  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  et définir l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique associé au potentiel magnétique comme étant  $P_{\mathbf{A}, \Omega} + V$  (le potentiel électrique  $V$  est supposé fixé). La proposition nous dit bien que le spectre ne dépend pas du choix du représentant  $\mathbf{A}$  tant que celui-ci vérifie  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . On appellera “changement de jauge” l'action de changer ce représentant parmi une certaine classe de potentiels magnétiques qui sera précisée plus tard : on obtient alors un nouvel opérateur unitairement équivalent.

On s'attend à ce que le spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega}$  ne dépende que de la géométrie de  $\Omega$  et du champ magnétique. On a ainsi :

**Proposition B.3.** *Soit  $\mathbf{t}$  un vecteur et  $\Omega_{\mathbf{t}}$  le domaine déduit de  $\Omega$  par translation de vecteur  $\mathbf{t}$ . Alors les opérateurs  $P_{\mathbf{A}, \Omega}$  et  $P_{\mathbf{A}, \Omega_{\mathbf{t}}}$  sont unitairement équivalents. De plus,  $x \mapsto u(x)$  est un vecteur propre de  $P_{\mathbf{A}, \Omega}$  si et seulement si*

$$u_{\mathbf{t}} : x \mapsto e^{i\frac{\mathbf{B}}{2}x \wedge \mathbf{t}} u(x - \mathbf{t})$$

*est un vecteur propre de  $P_{\mathbf{A}, \Omega_{\mathbf{t}}}$ .*

En dimension deux, le bas du spectre d'un opérateur de Schrödinger magnétique est invariant par rotation :

**Proposition B.4.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine plan et  $\mathbf{A}$  un potentiel magnétique plan tel que  $\text{rot } \mathbf{A}$  est un scalaire constant. Soit  $R$  une rotation du plan. Alors les opérateurs  $P_{\mathbf{A}, \Omega}$  et  $P_{\mathbf{A}, R(\Omega)}$  sont unitairement équivalents.*

On a une propriété remarquable qui est indépendante de l'ouvert  $\Omega$  :

**Proposition B.5.** *Les opérateurs  $P_{\mathbf{A}, \Omega} + V$  et  $P_{-\mathbf{A}, \Omega} + V$  sont unitairement équivalents. De plus  $u$  est un vecteur propre de  $P_{\mathbf{A}, \Omega} + V$  si et seulement si  $\bar{u}$  est un vecteur propre de  $P_{-\mathbf{A}, \Omega} + V$ , où  $\bar{u}$  désigne le conjugué de  $u$ .*

*Preuve :* On constate que puisque  $V$  et  $\mathbf{A}$  sont réels, on a  $\overline{P_{\mathbf{A}, \Omega} + V} = P_{-\mathbf{A}, \Omega} + V$ . En notant  $\mathcal{C}$  la conjugaison complexe :

$$\mathcal{C} : u \in \text{Dom}(P_{\mathbf{A}, \Omega} + V) \mapsto \bar{u} ,$$

on a

$$\mathcal{C} \circ (P_{\mathbf{A}, \Omega} + V) \circ \mathcal{C} = P_{-\mathbf{A}, \Omega} + V .$$

Puisque  $\mathcal{C}^2 = \text{Id}$ ,  $\mathcal{C}$  est unitaire et on a le résultat.  $\square$

## B.4 Formules de localisation

Nous présentons dans cette section des formules de localisations (aussi appelées formules “IMS”) pour des opérateurs de Schrödinger présentés dans les sections précédentes (ces identités sont valables en dimension 2 ou 3). Ces formules sont à la base d’estimations de quasi-modes construits en tronquant une fonction définie sur un sous-domaine de  $\Omega$ . Les formules du type “partition de l’unité” sont utilisées pour démontrer des minoration de valeurs propres connaissant le spectre d’un opérateur sur des domaines modèles. Ces formules IMS permettent aussi de montrer des estimations de concentrations appelées “estimations d’Agmon” pour les fonctions propres d’un opérateur de Schrödinger (voir [Agm82]). On pourra retrouver certaines de ces formules dans [CFKS87] et [FH10] et les voir appliquer pour des estimations semi-classiques dans [HS84] ou [Ray09b] par exemple.

**Proposition B.6.** *Soit  $u \in \text{Dom}(P_{\mathbf{A},\Omega} + V)$  une fonction du domaine de l’opérateur et  $\chi$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $\Omega$  telle que  $\chi u \in H_{\mathbf{A},V}^1(\Omega)$  et  $\chi^2 u \in H_{\mathbf{A},V}^1(\Omega)$ . Alors on a*

$$\text{Re} \langle (P_{\mathbf{A},\Omega} + V) u, \chi^2 u \rangle_{L^2(\Omega)} = \mathcal{Q}_{\mathbf{A},V}(\chi u) - \|\nabla \chi |u|\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{B.6})$$

*Preuve :* Nous prouvons l’identité pour le cas particulier où  $V = 0$ . La preuve s’adapte pour le cas d’un potentiel électrique  $V$  non nul. On a par la formule de Green-Riemann :

$$\langle P_{\mathbf{A},\Omega} u, \chi^2 u \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (-i\nabla - \mathbf{A})u \overline{(-i\nabla - \mathbf{A})(\chi^2 u)} + \int_{\partial\Omega} \chi^2 u (-i\nabla - \mathbf{A})u \cdot \mathbf{n}$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure au bord de  $\Omega$ . Cette normale est définie presque partout si  $\partial\Omega$  est lipschitzien. Le terme de bord est nul puisqu’on a supposé que  $u$  était dans le domaine et vérifiait la condition de Neumann magnétique. Nous avons les relations de commutations suivantes :

$$(-i\nabla - \mathbf{A})(\chi^2 u) = \chi(-i\nabla - \mathbf{A})(\chi u) - i\chi u \nabla \chi$$

et

$$\chi(-i\nabla - \mathbf{A})u = (-i\nabla - \mathbf{A})(\chi u) + iu \nabla \chi.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \langle P_{\mathbf{A},\Omega} u, \chi^2 u \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (-i\nabla - \mathbf{A})u \cdot \overline{\chi(-i\nabla - \mathbf{A})(\chi u) - i\chi u \nabla \chi} \\ &= \int_{\Omega} \chi(-i\nabla - \mathbf{A})u \cdot \overline{(-i\nabla - \mathbf{A})(\chi u) - i\chi u \nabla \chi} \\ &= \int_{\Omega} ((-i\nabla - \mathbf{A})(\chi u) + iu \nabla \chi) \cdot \overline{((-i\nabla - \mathbf{A})(\chi u) - iu \nabla \chi)} \\ &= \mathcal{Q}_{\mathbf{A},0}(\chi u) - \|\nabla \chi |u|\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2i \text{Re} \left( \int_{\Omega} \overline{\nabla \chi} u \cdot (-i\nabla - \mathbf{A})u \right). \end{aligned}$$

On prend la partie réelle de cette identité et le terme  $2i \text{Re} \left( \int_{\Omega} \overline{\nabla \chi} u \cdot (-i\nabla - \mathbf{A})u \right)$  disparaît. On en déduit l’identité annoncée.  $\square$

Lorsque  $u$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $\sigma$  pour l'opérateur  $P_{\mathbf{A},\Omega} + V$  et que  $\Phi$  est une fonction bien choisie, la formule IMS démontrée permet d'estimer l'énergie de la fonction  $e^\Phi u$ . La proposition suivante sera utile pour montrer que  $e^\Phi u \in L^2(\Omega)$  :

**Corollaire B.7.** *Soit  $\Phi$  une fonction bornée et uniformément lipschitzienne sur  $\Omega$  et soit  $(\sigma, u)$  une paire propre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A},\Omega} + V$ . Alors on a*

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{A},V}(e^\Phi u) = \int_{\Omega} (\sigma + |\nabla \Phi|^2) e^{2\Phi} |u|^2. \quad (\text{B.7})$$

Nous aurons également besoin de réaliser des partitions de l'unité et d'estimer l'énergie des fonctions tronquées :

**Corollaire B.8.** *Soit  $(\chi_i)_i$  une partition finie de l'unité vérifiant  $\sum_i \chi_i^2 = 1$ , on suppose aussi que  $\forall i, \chi_i \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ . Alors on a*

$$\forall u \in H_{\mathbf{A},V}^1(\Omega), \quad \sum_i \mathcal{Q}_{\mathbf{A},V}(\chi_i u) = \mathcal{Q}_{\mathbf{A},V}(u) + \int_{\Omega} \sum_i |\nabla \chi_i|^2 |u|^2. \quad (\text{B.8})$$

## B.5 Caractérisation du spectre essentiel

Les propositions du chapitre précédent permettent d'obtenir des estimations sur le bas du spectre d'un opérateur autoadjoint. Pour mieux localiser les valeurs propres, il est utile de connaître le spectre essentiel de l'opérateur. Soit  $\Omega$  un ouvert non borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $H = L^2(\Omega)$ . Le résultat suivant provient des travaux de [Per60] et [Agm85] et utilise le critère de Weyl. On pourra trouver une preuve dans [FH10, Annexe B]. Soit  $B_r$  la boule ouverte de centre 0 et de rayon  $r$  et  $\mathbb{C}B_r$  son complémentaire. On introduit les restrictions à  $\Omega$  de fonctions infiniment dérivables à support compact hors de la boule  $B_r$ .

$$\mathcal{K}_r(\Omega) = C_0^\infty(\bar{\Omega} \cap \mathbb{C}B_r). \quad (\text{B.9})$$

On définit pour  $r > 0$

$$\Sigma(P_{\mathbf{A},\Omega} + V, r) := \inf_{u \in \mathcal{K}_r(\Omega)} \{ \mathcal{Q}_{\mathbf{A},V}(u), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \} \quad (\text{B.10})$$

$$= \inf_{u \in \mathcal{K}_r(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbf{A}} u|^2 + |Vu|^2, \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}. \quad (\text{B.11})$$

On a que  $r \rightarrow \Sigma(P_{\mathbf{A},\Omega} + V, r)$  est croissante sur  $(0, +\infty)$ . Nous notons  $\Sigma(P_{\mathbf{A},\Omega} + V) \in (0, +\infty]$  sa limite quand  $r \rightarrow \infty$ .

**Théorème B.9** (Lemme de Persson). *On a*

$$\Sigma(P_{\mathbf{A},\Omega} + V) = \inf \mathfrak{S}_{ess}(P_{\mathbf{A},\Omega} + V). \quad (\text{B.12})$$

## B.6 Opérateurs modèles pour l'espace et le demi-espace

Nous étudions dans cette section le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant unitaire et sans potentiel électrique sur deux domaines modèles : l'espace  $\mathbb{R}^3$  et le demi-espace  $\mathbb{R}_+^3$ . Comprendre ces deux cas est le premier pas pour décrire le spectre de l'opérateur de Schrödinger semi-classique avec champ magnétique constant dans un ouvert régulier borné en dimension 3 (voir [HM04]).

### B.6.1 Le cas de l'espace

Nous cherchons le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant unitaire dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Les coordonnées cartésiennes seront notées  $(s, t, z)$ . Quitte à effectuer une rotation puis un changement de jauge, on prend le potentiel vecteur égal à  $\mathcal{A}_0(s, t, z) = (0, 0, t)$  de sorte que

$$\text{rot } \mathcal{A}_0 = (1, 0, 0) .$$

L'opérateur s'écrit alors

$$P_{\mathcal{A}_0, \mathbb{R}^3} = D_s^2 + D_t^2 + (D_z - t)^2 .$$

Nous réalisons des transformations de Fourier partielles par rapport aux variables  $s$  et  $z$  et l'opérateur s'écrit sous la forme d'une intégrale directe :

$$P_{\mathcal{A}_0, \mathbb{R}^3} = \int_{(\xi_1, \xi_3) \in \mathbb{R}^2}^{\oplus} D_t^2 + (\xi_3 - t)^2 + \xi_1^2 d\xi_1 d\xi_3 . \quad (\text{B.13})$$

### L'oscillateur harmonique

Introduisons maintenant un opérateur modèle unidimensionnel important : l'oscillateur harmonique. Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle réel non borné. Définissons

$$B^k(I) := \{u \in L^2(I), t^p u^{(q)} \in L^2(I), \forall (p, q) \mid 0 \leq p + q \leq k\} . \quad (\text{B.14})$$

L'oscillateur harmonique sur  $\mathbb{R}$  est défini comme l'opérateur

$$\mathfrak{h} = D_t^2 + t^2 \quad (\text{B.15})$$

sur le domaine  $\text{Dom}(\mathfrak{h}) = B^2(\mathbb{R})$ . Cet opérateur est un opérateur positif à résolvante compacte et son spectre est constitué de valeurs propres simples :

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{h}) = \{2k - 1, k \in \mathbb{N}^*\} . \quad (\text{B.16})$$

Les vecteurs propres associés sont les fonctions d'Hermite que nous notons  $\psi_k$  (avec la convention que les  $\psi_k$  sont normalisées et que  $\psi_1$  correspond à la première fonction d'Hermite). Elles vérifient donc l'équation d'Hermite

$$\forall k \geq 1, \quad -\psi_k''(t) + t^2 \psi_k(t) = (2k - 1) \psi_k(t), \quad t \in \mathbb{R} . \quad (\text{B.17})$$



On a plus précisément

$$\psi_1(t) = \pi^{-1/4} e^{-t^2/2} .$$

Revenons à l'opérateur de Schrödinger magnétique sur  $\mathbb{R}^3$ . On a en effectuant une translation dans (B.13) que

$$P_{A_0, \mathbb{R}^3} = \int_{(\xi_1, \xi_3) \in \mathbb{R}^2}^{\oplus} \mathfrak{h} + \xi_1^2 d\xi_1 d\xi_3 .$$

En utilisant (B.16), on a le résultat classique suivant :

**Proposition B.10.** *Le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant unitaire sur l'espace  $\mathbb{R}^3$  vaut  $[1, +\infty)$ .*

### B.6.2 Le cas du demi-espace

Dans le cas où  $\Omega = \mathbb{R}_+^3$ , avec  $\mathbb{R}_+^3 := \{(s, t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\}$ , l'étude va dépendre de l'orientation du champ magnétique. Soit  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$  la normale rentrante au bord du demi-espace. Nous supposons que le champ magnétique fait un angle  $\theta$  avec le bord du demi-espace, c'est-à-dire que

$$\mathbf{B}_\theta \cdot \mathbf{n} = \sin \theta . \quad (\text{B.18})$$

Quitte à changer les axes en effectuant une rotation autour de  $\mathbf{n}$ , on peut faire l'hypothèse que le champ magnétique s'écrit

$$\mathbf{B}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta, 0) .$$

On choisit comme potentiel magnétique le potentiel vecteur

$$\mathbf{A}_\theta = (0, 0, t \cos \theta - s \sin \theta) . \quad (\text{B.19})$$

L'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique s'écrit

$$P_{\mathbf{A}_\theta, \mathbb{R}_+^3} = D_s^2 + D_t^2 + (D_z + s \sin \theta - t \cos \theta)^2 .$$

Nous définissons

$$\sigma(\theta) := \inf \mathfrak{S} \left( P_{\mathbf{A}_\theta, \mathbb{R}_+^3} \right) , \quad (\text{B.20})$$

c'est-à-dire  $\sigma(\theta) = \lambda(\mathbf{B}_\theta; \mathbb{R}_+^3)$ . Par des considérations de symétries (voir [HM04]), on montre qu'il suffit de traiter le cas  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . En effectuant une transformation de Fourier partielle dans la variable  $z$ , on a la décomposition en intégrale directe de l'opérateur :

$$P_{\mathbf{A}_\theta, \mathbb{R}_+^3} = \int_{\tau \in \mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\theta, \tau} d\tau , \quad (\text{B.21})$$

avec  $\mathcal{H}_{\theta, \tau}$  l'opérateur défini comme la réalisation de Neumann de

$$\mathcal{H}_{\theta, \tau} := D_s^2 + D_t^2 + (\tau + s \sin \theta - t \cos \theta)^2 \quad (\text{B.22})$$

sur le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2 := \{(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ . Il s'agit d'un opérateur de Schrödinger avec champ électrique, nous avons plus précisément avec la notation (B.5) :

$$\mathcal{H}_{\theta, \tau} = P_{0, \mathbb{R}_+^2} + V = -\Delta + V$$

avec le potentiel électrique  $V(s, t) = (\tau + s \sin \theta - t \cos \theta)^2$ . Nous réécrivons le domaine défini en (B.3) (qui ne dépend pas de  $\tau$  ici) :

$$\text{Dom}(\mathcal{H}_{\theta, \tau}) = \{u \in H^2(\mathbb{R}_+^2), |s \sin \theta - t \cos \theta|^2 u \in L^2(\mathbb{R}_+^2), \mathbf{n} \cdot \nabla u|_{t=0} = 0\}$$

avec  $\mathbf{n} = (0, 1)$  la normale rentrante au bord de  $\mathbb{R}_+^2$ .

### Le cas d'un champ tangent au bord

Si  $\theta = 0$ , c'est-à-dire si le champ magnétique  $\mathbf{B}_\theta$  est tangent au bord du demi-espace, alors on réalise une nouvelle transformée de Fourier partielle par rapport à  $s$  :

$$\mathcal{H}_{0, \tau} = \int_{\xi_1 \in \mathbb{R}}^{\oplus} \xi_1^2 + D_t^2 + (\tau - t)^2 d\xi_1. \quad (\text{B.23})$$

Pour poursuivre l'étude du bas du spectre, nous introduisons la famille d'opérateurs de De Gennes. Il s'agit de la réalisation de Neumann de

$$\mathbf{h}_\tau^N := D_t^2 + (\tau - t)^2, \quad t \geq 0. \quad (\text{B.24})$$

Nous précisons son domaine :

$$\text{Dom}(\mathbf{h}_\tau^N) = \{u \in B^2(\mathbb{R}^+) \mid u'(0) = 0\},$$

où  $B^2(\mathbb{R}_+)$  est défini en (B.14). Notons qu'en effectuant une translation, on constate que  $\mathbf{h}_\tau^N$  est unitairement équivalent à la réalisation de Neumann de l'oscillateur harmonique sur le demi-axe  $[-\tau, +\infty)$ . Cette famille d'opérateurs sera étudiée plus en détails dans le chapitre 1. Nous notons  $\mu_1^N(\tau)$  le bas du spectre de  $\mathbf{h}_\tau^N$ . Un résultat fondamental est le suivant :

$$\inf_{\tau} \mu_1^N(\tau) = \Theta_0 \quad (\text{B.25})$$

où  $\Theta_0 \simeq 0.590106$  est une constante universelle. Lorsque le champ est tangent au bord du demi-espace, on a donc en utilisant (B.21), (B.23) et (B.25) :

$$\mathfrak{S}(P_{\mathbf{A}_0, \mathbb{R}_+^3}) = [\Theta_0, +\infty). \quad (\text{B.26})$$

et donc

$$\sigma(0) = \Theta_0. \quad (\text{B.27})$$

### Le cas d'un champ non tangent au bord

Dans le cas où  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , on réalise la translation  $\tau + s \sin \theta \rightarrow s \sin \theta$  qui montre que l'opérateur  $\mathcal{H}_{\theta, \tau}$  est unitairement équivalent à  $\mathcal{H}_{\theta, 0}$ . Nous introduisons le potentiel électrique

$$V_\theta(s, t) = (s \sin \theta - t \cos \theta)^2.$$

Nous nous sommes ramenés à étudier l'opérateur (avec condition de Neumann) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\theta &:= \mathcal{H}_{\theta,0} \\ &= P_{0,\mathbb{R}_+^2} + V_\theta \\ &= -\Delta + (s \sin \theta - t \cos \theta)^2.\end{aligned}$$

On a donc pour  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\sigma(\theta) = \inf \mathfrak{S}(\mathcal{L}_\theta) \tag{B.28}$$

où  $\sigma(\theta)$  est défini en (B.20). Il est démontré dans [LP00a] et [HM04] que

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \Theta_0 < \sigma(\theta) < 1$$

et que  $\sigma(\theta)$  est une valeur propre simple de  $\mathcal{L}_\theta$  pour  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . On a donc que  $\sigma(\theta)$  est une valeur propre de multiplicité infinie de  $P_{\mathbf{A}_\theta, \mathbb{R}_+^3}$ . Nous étudierons plus en détails l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  pour  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  dans le chapitre 2.

# Chapitre C

## Calculs du bas du spectre par éléments finis

Nous présentons dans ce chapitre des éléments des méthodes numériques que nous allons utiliser pour calculer le bas du spectre des opérateurs de Schrödinger rencontrés. Les calculs par éléments finis sont tous réalisés à l’aide de la librairie d’éléments finis MELINA (voir [Mar10]). Les paires propres sont post-traités avec Matlab, qui permet en particulier de représenter les vecteurs propres sur le maillage utilisé.

### C.1 Choix du maillage

Nous décrivons ici les maillages que nous utiliserons pour modéliser le secteur d’angle  $\alpha$  :

$$\mathcal{S}_\alpha = \left\{ |x_2| < x_1 \tan \frac{\alpha}{2} \right\} .$$

On distinguera deux types de maillages : les maillages dits en “losange” et ceux dits “en triangle”. Ils sont obtenus à partir de maillages modèles auxquels nous faisons subir une dilatation selon un des axes de coordonnées.

Pour obtenir un maillage en losange, nous partons d’un maillage tensoriel carré à  $N$  couches de côté  $L$ . Ce carré a une de ses diagonales supportée par l’axe  $\{x_2 = 0\}$ , nous supposons de plus que le maillage est régulier. Nous réalisons une dilatation selon l’axe  $\{x_1 = 0\}$  en utilisant le changement d’échelle suivant :

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = x_2 \tan \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Nous obtenons un losange d’ouverture  $\alpha$ . Nous le notons  $\text{Los}(N, L, \alpha)$ . La longueur de la diagonale du losange supportée par l’axe  $\{x_2 = 0\}$  vaut alors  $\sqrt{2}L$ .

Sur la figure C.1, nous montrons la structure carrée initiale dont les côtés sont de longueur  $L = 15$ . Ce maillage est composé de  $N = 10$  couches. Sur la figure C.2 nous

avons réalisé la dilatation décrite ci-dessus pour  $\alpha = \frac{\pi}{5}$  et nous obtenons le maillage  $\text{Los}(10, 15, \frac{\pi}{5})$ .

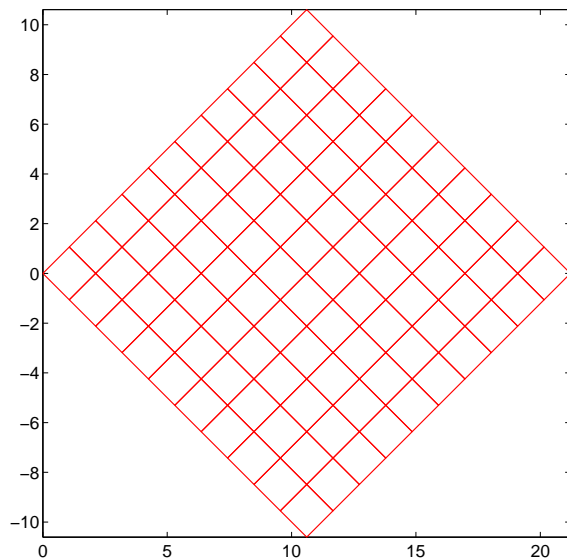


FIGURE C.1 – Maillage carré initial de côté  $L = 15$  composé de 10 couches.

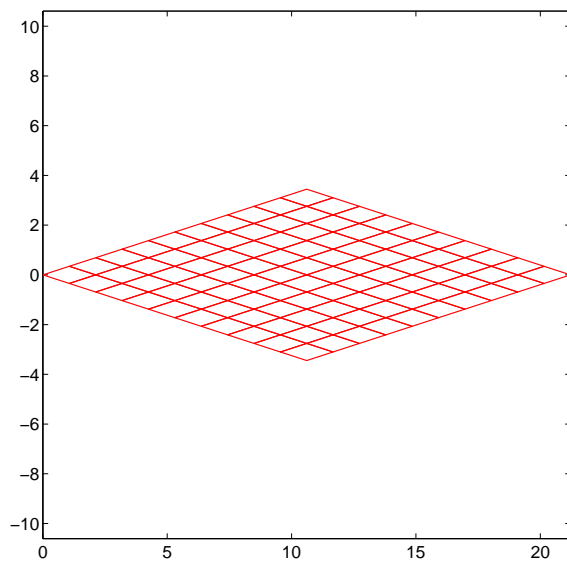
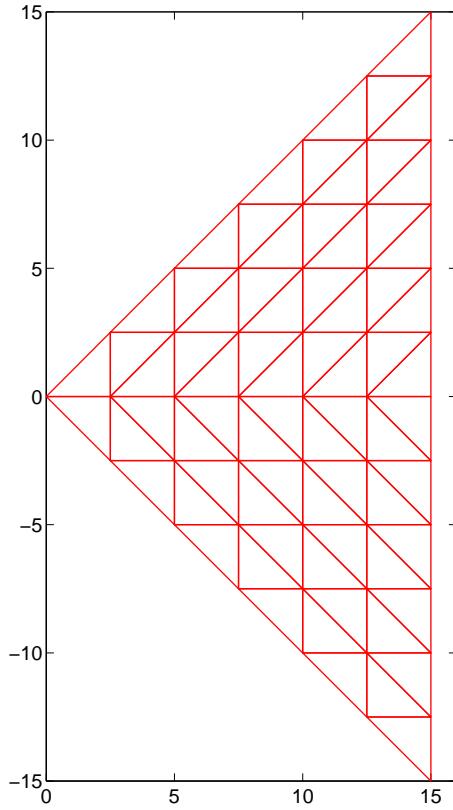
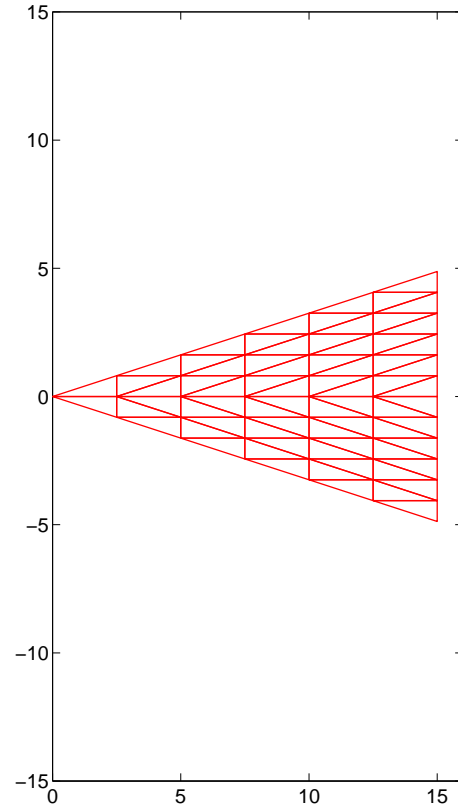


FIGURE C.2 – Le maillage  $\text{Los}(10, 15, \frac{\pi}{5})$ .

Pour discrétiser  $\mathcal{S}_\alpha$ , nous utiliserons aussi des maillages triangulaires. Le triangle modèle est un triangle isocèle dont la hauteur médiane a une longueur  $L$ . Le maillage est régulier et composé d'un nombre  $N$  de colonnes. Le nombre de nœuds présents sur l'axe  $\{x_2 = 0\}$  vaut alors  $N + 1$ . Sur la figure C.3(a), nous représentons cette structure modèle pour  $N = 6$  et  $L = 15$ . Sur la figure C.3(b) nous représentons  $\text{Tri}(6, 15, \frac{\pi}{5})$ .



(a) Maillage triangulaire initial de hauteur médiane 15 composé de 6 colonnes.



(b) Le maillage  $\text{Tri}(6, 15, \frac{\pi}{5})$ .

FIGURE C.3 – Maillages triangulaires.

De manière générale nous utiliserons un maillage en losange pour calculer le bas du spectre d'un opérateur de Schrödinger sur le domaine  $\mathcal{S}_\alpha$  lorsque les vecteurs propres associés "s'étalent" le long de la bissectrice du secteur. A l'inverse si les vecteurs propres sont concentrés dans le coin du secteur, nous choisirons de modéliser le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  par un maillage triangulaire.

## C.2 Représentation de la phase

Nous serons amenés à représenter des vecteurs propres d'opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique définis sur un domaine  $\Omega$ . Ces fonctions sont à valeurs complexes et nous discutons ici de la manière de représenter leur phase. Un premier choix est de représenter la phase entre  $-\pi$  et  $\pi$  de la fonction. Nous donnons un exemple sur la figure 4.7(a). Nous constatons que cette représentation ne rend pas bien compte des oscillations à cause des discontinuités présentes lorsque la phase “saute” de  $-\pi$  à  $\pi$ .

Nous utiliserons la représentation issue de [BNDMV07] : nous traçons la phase modulo  $\pi$  des vecteurs propres en représentant pour un vecteur propre  $u$  la quantité

$$\phi(x_1, x_2) := \arcsin \left( \frac{\operatorname{Im}(u(x_1, x_2))}{|u(x_1, x_2)|} \right). \quad (\text{C.1})$$

Un exemple est donné sur la figure C.4.

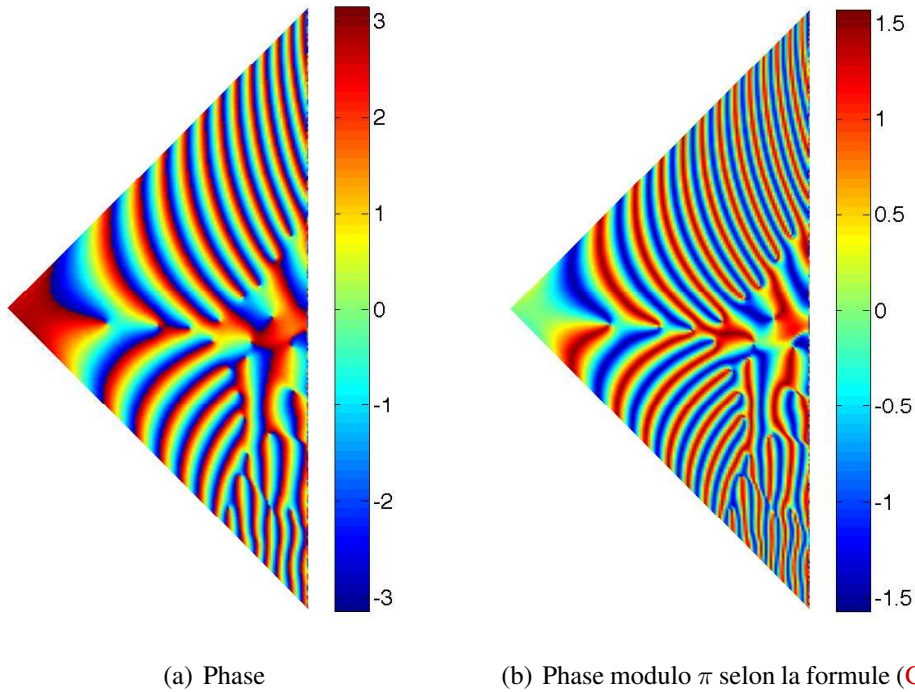


FIGURE C.4 – Deux représentations de la phase d'une fonction.

## **Première partie**

### **Opérateurs modèles de Schrödinger sur la demi-droite et le demi-plan**





# Chapitre 1

## Etude d'opérateurs de Schrödinger avec des potentiels singuliers en dimension 1

Nous étudions dans ce chapitre des familles d'opérateurs modèles à paramètres sur des intervalles réels. Dans un premier temps nous rappelons des faits connus sur le spectre de l'opérateur de de Gennes défini comme la réalisation de Neumann sur  $\mathbb{R}_+$  de

$$-\partial_t^2 + (t - \tau)^2 .$$

Nous introduisons dans la section 1.2 la réalisation de Dirichlet associée à cet opérateur. Nous faisons alors la remarque suivante : les spectres de ces deux problèmes sur le demi-axe peuvent être connus à partir du spectre d'un opérateur défini sur l'axe réel. Il faut pour cela symétriser le potentiel  $(t - \tau)^2$  défini à la base pour  $t > 0$ . Le potentiel pair  $V_\tau^{\text{sym}}$  ainsi défini sur  $\mathbb{R}$  est singulier en 0 si  $\tau \neq 0$ . Nous montrons dans la section 1.4 que lorsque le paramètre  $\tau$  tend vers l'infini, nous sommes ramenés à une situation d'analyse semi-classique. Dans le cas  $\tau \rightarrow -\infty$ , l'opérateur modèle sous-jacent est l'opérateur d'Airy, et les techniques de [DR11] permettent de faire un développement asymptotique des valeurs propres. Lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ , la situation est plus délicate : le potentiel  $V_\tau^{\text{sym}}$  présente deux fonds de puits quadratiques symétriques. La théorie de l'effet tunnel prévoit que les valeurs propres se regroupent par paires exponentiellement proches. Nous mettons en évidence un terme d'interaction qui permet d'estimer le “splitting” des valeurs propres, mais les techniques de construction BKW usuelles ne s'appliquent pas *stricto sensu*, en effet le potentiel présente une singularité. Nous réalisons donc à la main un développement de ce terme d'interaction et nous donnons un développement asymptotique précis des valeurs propres de l'opérateur de de Gennes. Des calculs numériques viennent corroborer les résultats trouvés. Nous nous intéressons finalement dans la section 1.5 à un deuxième opérateur de Schrödinger avec un potentiel singulier en “pic” dont les minima ne sont plus quadratiques mais affines. Encore une fois nous mettons en évidence un effet tunnel entre les valeurs propres qui n'est pas décrit par la théorie usuelle. Nous montrons en particulier que le splitting a lieu à des échelles différentes de celles connues dans le cas des fonds de puits quadratiques.

## 1.1 Propriétés élémentaires de l'opérateur de de Gennes

Nous énonçons ici des propriétés de l'opérateur de de Gennes (défini en (B.24)) qui pourront être retrouvées dans [FH10].

La forme quadratique associée à l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^N$  est définie par

$$\mathfrak{q}_\tau^N(u) := \int_{\mathbb{R}_+} |u'(t)|^2 + (t - \tau)^2 |u(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

sur le domaine de forme  $B^1(\mathbb{R}_+)$  défini en (B.14). Puisque l'injection de  $B^1(\mathbb{R}_+)$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  est compacte, on a que l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^N$  est à résolvante compacte. Puisqu'il est clairement positif, son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini. Nous notons  $\mu_k^N(\tau)$  la  $k$ -ième valeur propre. Nous noterons parfois pour simplifier  $\mu^N(\tau) = \mu_1^N(\tau)$  la première valeur propre. Par le théorème de Cauchy, les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$\begin{cases} -u''(t) + (t - \tau)^2 u(t) = \mu_k^N(\tau) u(t), & t > 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

forment un espace vectoriel de dimension 1<sup>1</sup>. Les valeurs propres  $\mu_k^N(\tau)$  sont donc simples pour tout entier  $k$  et tout réel  $\tau$ . Par le théorème d'unicité de Cauchy il est clair qu'une fonction propre non nulle ne s'annule pas en 0. Nous notons  $u_{\tau,k}^N$  l'unique vecteur propre normé associé à  $\mu_k^N(\tau)$  avec la condition initiale  $u_{\tau,k}^N(0) > 0$ . Encore une fois nous simplifierons les notations pour le premier vecteur propre en notant  $u_\tau^N = u_{\tau,1}^N$ . On sait (voir [FH10]) que la première fonction propre est de signe constant et ne s'annule pas. On a la minoration

$$\forall \tau \leq 0, \forall t \geq 0, \quad (t - \tau)^2 \geq \tau^2$$

donc par le principe du min-max on a

$$\forall k \geq 1, \forall \tau \leq 0, \quad \mu_k^N(\tau) \geq \tau^2$$

et donc

$$\forall k \geq 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \mu_k^N(\tau) = +\infty. \quad (1.3)$$

Nous préciserons le comportement de  $\mu_k^N(\tau)$  lorsque  $\tau$  tend vers  $-\infty$  dans la section 1.4.

## 1.2 Comparaison des problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'opérateur de de Gennes

Nous introduisons  $\mathfrak{h}_\tau^D$  la réalisation de Dirichlet de  $-\partial_t^2 + (t - \tau)^2$  définie sur le domaine

$$\text{Dom}(\mathfrak{h}_\tau^D) = \{u \in B^2(\mathbb{R}_+), u(0) = 0\}.$$

---

1. L'appartenance des solutions de (1.2) à  $L^2(\mathbb{R}_+)$  est une caractérisation du fait que  $\mu_k^N(\tau)$  est une valeur propre de  $\mathfrak{h}_\tau^N$ .

Nous notons  $\mu_k^D(\tau)$  la  $k$ -ième valeur propre de cet opérateur. En effectuant la translation  $T = t - \tau$ , on voit que  $\mathfrak{h}_\tau^N$  et  $\mathfrak{h}_\tau^D$  sont équivalents respectivement aux réalisations de Neumann et de Dirichlet de l'oscillateur harmonique  $-\partial_T^2 + T^2$  sur le demi-axe  $(-\tau, +\infty)$ . En utilisant des inclusions sur les domaines de formes, on a immédiatement

$$\forall k \geq 1, \quad \tau \rightarrow \mu_k^D(\tau) \text{ est une fonction décroissante sur } \mathbb{R} \quad (1.4)$$

et

$$\forall k \geq 1, \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \mu_k^D(\tau) \geq \mu_k^N(\tau). \quad (1.5)$$

En utilisant les fonctions d'Hermite centrées en  $\tau$  puis tronquées, on montre (voir [FH10]) que

$$\forall k \geq 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \mu_k^N(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \mu_k^D(\tau) = 2k - 1. \quad (1.6)$$

Nous précisons cette asymptotique dans la section 1.4. Il résulte de (1.4) et de (1.6) la minoration

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \mu_k^D(\tau) \geq 2k - 1. \quad (1.7)$$

Nous comparons les valeurs propres des réalisations de Neumann et de Dirichlet à un problème obtenu en symétrisant le potentiel sur  $\mathbb{R}$  : soit  $V_\tau^{\text{sym}}$  le potentiel défini sur  $\mathbb{R}$  par

$$V_\tau^{\text{sym}}(t) := (|t| - \tau)^2. \quad (1.8)$$

Nous lui associons l'opérateur de Schrödinger

$$\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}} := -\partial_t^2 + V_\tau^{\text{sym}} \quad (1.9)$$

défini sur le domaine  $B^2(\mathbb{R})$ . Son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres simples qui tend vers  $+\infty$  (voir par exemple [CH53]). Nous notons  $\mu_k^{\text{sym}}(\tau)$  la  $k$ -ième valeur propre. Il est connu d'après la théorie de Sturm-Liouville que le vecteur propre associé à  $\mu_k^{\text{sym}}(\tau)$  s'annule exactement  $k - 1$  fois sur  $\mathbb{R}$  et que ses racines sont simples. De plus, comme le potentiel est pair, les fonctions propres sont soit paires soit impaires. Puisqu'une fonction impaire régulière s'annule en zéro et que la première fonction propre de  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  ne s'annule pas, elle est paire. Les fonctions propres suivantes sont alternativement impaires et paires. On peut alors énoncer une relation entre les spectres de  $\mathfrak{h}_\tau^N$ ,  $\mathfrak{h}_\tau^D$  et  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  :

**Proposition 1.1.** *On a*

$$\forall k \geq 1, \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \mu_k^N(\tau) = \mu_{2k-1}^{\text{sym}}(\tau) \text{ et } \mu_k^D(\tau) = \mu_{2k}^{\text{sym}}(\tau). \quad (1.10)$$

*Preuve :* On remarque qu'un vecteur propre pair (respectivement impair) de  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  vérifie la condition de Neumann (respectivement Dirichlet) en 0 et peut donc se restreindre en une fonction propre de  $\mathfrak{h}_\tau^N$  (respectivement  $\mathfrak{h}_\tau^D$ ). Réciproquement une fonction propre de  $\mathfrak{h}_\tau^N$  (respectivement  $\mathfrak{h}_\tau^D$ ) peut se prolonger en une fonction propre paire (respectivement impaire) de  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$ , de plus les fonctions ainsi prolongées sont orthogonales dans  $L^2(\mathbb{R})$  : en effet, deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de  $\mathfrak{h}_\tau^N$  sont orthogonaux, tout comme les vecteurs propres de  $\mathfrak{h}_\tau^D$ . De plus une fonction paire et une fonction impaire sont toujours orthogonales dans  $L^2(\mathbb{R})$ . On conclut avec le principe du min-max.  $\square$

On remarque que pour  $\tau = 0$ , le potentiel est  $V_0^{\text{sym}}(t) = t^2$ . A partir du spectre de l'oscillateur harmonique décrit en (B.16), on en déduit le

**Corollaire 1.2.** *On a*

$$\forall k \geq 1, \quad \mu_k^N(0) = 4k - 3 \text{ et } \mu_k^D(0) = 4k - 1. \quad (1.11)$$

### 1.3 Etude des variations des valeurs propres du problème de de Gennes

Nous rappelons dans cette section une formule qui permet d'obtenir une équation différentielle sur la fonction  $\tau \rightarrow \mu_k^N(\tau)$ . A partir de celle-ci on étudie les variations de la fonction et on rappelle aussi des formules de moment pour les vecteurs propres de l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^N$ . Comme la famille  $\tau \rightarrow \mathfrak{h}_\tau^N$  est une famille analytique d'opérateurs de type A (voir [Kat95]) et que les valeurs propres sont simples, on sait que les valeurs propres  $\tau \rightarrow \mu_k^N(\tau)$  sont analytiques sur  $\mathbb{R}$  pour tout entier  $k$ . De même les vecteurs propres  $u_{\tau,k}^N$  sont analytiques par rapport à  $\tau$  et nous notons

$$v_{\tau,k}^N = \partial_\tau u_{\tau,k}^N.$$

La formule de Feynman-Hellmann (voir la proposition A.5) donne une première expression pour  $(\mu_k^N)'(\tau)$  :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (\mu_k^N)'(\tau) = \int_{\mathbb{R}_+} (t - \tau) |u_{\tau,k}^N(t)|^2 dt. \quad (1.12)$$

Grâce aux techniques développées dans [BH93] puis [DH93a], on démontre la relation

$$(\mu_k^N)'(\tau) = (\tau^2 - \mu_k^N(\tau)) u_{\tau,k}^N(0)^2. \quad (1.13)$$

En exploitant cette relation, on a la proposition suivante, démontrée dans [FH10] :

**Proposition 1.3.** *La première valeur propre  $\mu_1^N(\tau)$  de  $\mathfrak{h}_\tau^N$  admet un minimum non dégénéré  $\Theta_0$  atteint en un unique point  $\xi_0$ . La fonction  $\tau \rightarrow \mu_1^N(\tau)$  est strictement décroissante sur  $(-\infty, \xi_0]$  puis strictement croissante sur  $[\xi_0, +\infty)$  vers  $[\Theta_0, 1)$ . On a de plus la relation fondamentale*

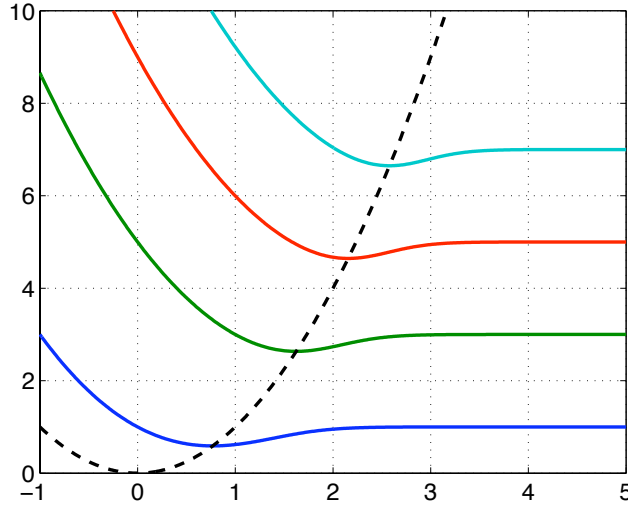
$$\xi_0^2 = \Theta_0. \quad (1.14)$$

La figure 1.1 donne les 4 premières valeurs propres de  $\mathfrak{h}_\tau^N$  pour  $\tau \in [-1, 5]$  calculées à l'aide de la librairie d'éléments finis MÉLINA (voir [BN12, Section 5]). Dans [BN12], un schéma aux différences finies utilisant (1.14) a permis de calculer la constante  $\Theta_0$  avec une erreur inférieure à  $10^{-9}$  :

$$\Theta_0 \simeq 0.590106125 \text{ et } \xi_0 \simeq 0.76818365314. \quad (1.15)$$

Nous rappelons que  $u_{\xi_0}^N$  désigne le vecteur propre de  $\mathfrak{h}_{\xi_0}^N$  associé à  $\Theta_0$ . La formule (1.12) nous donne

$$\int_{\mathbb{R}_+} (t - \xi_0) |u_{\xi_0}^N(t)|^2 dt = 0. \quad (1.16)$$

FIGURE 1.1 – Les fonctions  $\mu_k^N(\tau)$  pour  $k = 1, \dots, 4$  et la parabole  $\tau \rightarrow \tau^2$ .

Nous rappelons des formules de moment qui seront utiles lorsque nous utiliserons cet opérateur modèle. Ces formules ont été introduites dans [BS98] et [LP99b], elles sont aussi résumées dans [FH10]. En différenciant deux fois l'équation aux valeurs propres par rapport à  $\tau$ , on trouve

$$\frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2} = 1 - 2 \int_{\mathbb{R}_+} (t - \xi_0) u_{\xi_0}^N(t) v_{\xi_0}^N(t) dt. \quad (1.17)$$

On trouve également en utilisant une identité du Viriel :

$$\int_{\mathbb{R}_+} (t - \xi_0)^2 |u_{\xi_0}^N(t)|^2 dt = \frac{\Theta_0}{2}. \quad (1.18)$$

Nous utiliserons dans la suite les fonctions analytiques standard suivantes, appelées fonctions d'erreur de Gauss :

$$\operatorname{erf}(\tau) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-\zeta^2} d\tau \quad (1.19)$$

et

$$\operatorname{erfc}(\tau) := 1 - \operatorname{erf}(\tau).$$

La proposition suivante fournit une minoration explicite de la première valeur propre de  $\mathfrak{h}_\tau^N$  :

**Proposition 1.4.** *On introduit la fonction*

$$m(\tau) := 1 - 2\tau \left( \frac{\sqrt{\pi}(2\tau^2 + 1) \operatorname{erfc}(\tau) - 2\tau e^{-\tau^2}}{\sqrt{\pi}(e^{-\tau^2} + 1)} \right)^{1/2}.$$

On a

$$\forall \tau \geq 0, \quad \mu_1^N(\tau) \geq m(\tau).$$

*Preuve :* Soit  $u_\tau^{\text{qm}}$  la fonction définie par

$$u_\tau^{\text{qm}} : t \mapsto e^{-(t-\tau)^2/2} + e^{-(t+\tau)^2/2}.$$

Cette fonction vérifie la condition de Neumann en 0 et on a donc  $u_\tau^{\text{qm}} \in \text{Dom}(\mathfrak{h}_\tau^{\text{N}})$ . On calcule sa norme dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |u_\tau^{\text{qm}}(t)|^2 dt = \sqrt{\pi} (e^{-\tau^2} + 1).$$

On évalue

$$\mathfrak{h}_\tau^{\text{N}} u_\tau^{\text{qm}}(t) = u_\tau^{\text{qm}}(t) - 4\tau t e^{-(t+\tau)^2/2}$$

puis on calcule

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^2 e^{-(t-\tau)^2} dt = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\pi} (2\tau^2 + 1) \text{erfc}(\tau) - 2\tau e^{-\tau^2} \right)$$

de sorte que

$$\|\mathfrak{h}_\tau^{\text{N}} u_\tau^{\text{qm}} - u_\tau^{\text{qm}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 2\tau \left( \sqrt{\pi} (2\tau^2 + 1) \text{erfc}(\tau) - 2\tau e^{-\tau^2} \right)^{1/2}.$$

Nous posons

$$r(\tau) = 2\tau \left( \frac{\sqrt{\pi} (2\tau^2 + 1) \text{erfc}(\tau) - 2\tau e^{-\tau^2}}{\sqrt{\pi} (e^{-\tau^2} + 1)} \right)^{1/2}$$

et  $m(\tau) := 1 - r(\tau)$ . Le théorème spectral appliqué à la fonction  $u_\tau^{\text{qm}}$  et les calculs qui précèdent permettent de déduire qu'il existe une valeur propre de  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{N}}$  dans l'intervalle  $(1 - r(\tau), 1 + r(\tau))$ . On vérifie avec maple que pour  $\tau \geq 0$ , on a  $1 + r(\tau) < 2$ . Or d'après [FHP11], on a

$$\forall \tau > 0, \quad \mu_2^{\text{N}}(\tau) > 2.$$

On déduit le résultat. □

Cette minoration est illustrée sur la figure 1.2. On constate que le minorant  $m(\tau)$  est très proche de  $\mu_1^{\text{N}}(\tau)$  lorsque  $\tau$  est proche de 0 ou lorsque  $\tau$  est grand. Ceci s'interprète de la manière suivante : les quasi-modes gaussiens construits  $u_\tau^{\text{qm}}$  sont très proches des vecteurs propres de  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{N}}$  pour  $\tau$  proche de 0 et  $\tau$  grand.

## 1.4 Etude de l'opérateur de de Gennes pour de grandes valeurs du paramètre

### 1.4.1 Le puits singulier

Nous commençons par traiter le cas  $\tau \rightarrow -\infty$ . L'asymptotique

$$\mu_k^{\text{N}}(\tau) \underset{\tau \rightarrow -\infty}{\sim} \tau^2$$

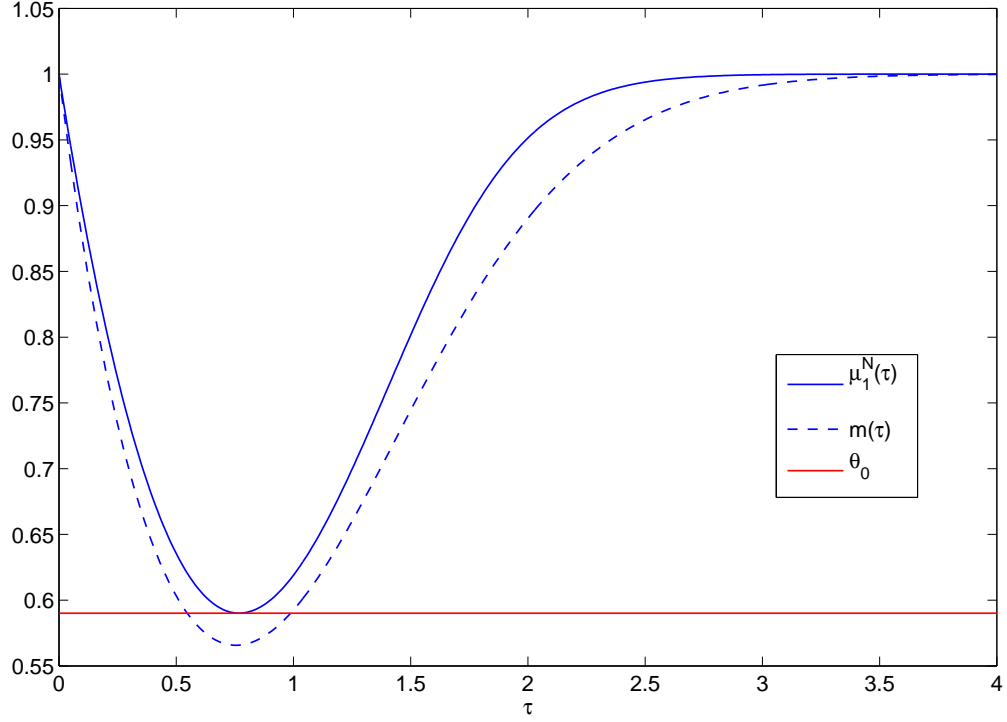


FIGURE 1.2 – La fonction  $\mu_1^N(\tau)$ , son minorant  $m(\tau)$  et la constante  $\Theta_0$  (calculée par éléments finis).

est connue (nous avons démontré la minoration de manière élémentaire en (1.3)). Nous précisons l'asymptotique afin de mieux voir apparaître la séparation des valeurs propres. On a besoin d'introduire un opérateur modèle lié à l'équation d'Airy sur  $\mathbb{R}$ . Soit

$$\mathbf{a} := -\partial_t^2 + |t|, \quad t \in \mathbb{R}$$

défini sur  $\text{Dom}(\mathbf{a}) = \{u \in H^2(\mathbb{R}), |t|u \in L^2(\mathbb{R})\}$ . Nous introduisons la fonction d'Airy de première espèce  $A_i$ , solution bornée de l'équation d'Airy sur  $\mathbb{R}$  :

$$-A_i''(t) + tA_i(t) = 0. \quad (1.20)$$

On introduit aussi la fonction d'Airy “inversée”  $A(t) := A_i(-t)$ . On sait que les zéros de  $A$  et de  $A'$  forment deux suites entrelacées qui tendent vers  $+\infty$  (voir la figure 1.3).

**Définition 1.5.** Nous notons respectivement  $(z_k^a)_{k \geq 1}$  et  $(\dot{z}_k^a)_{k \geq 1}$  les zéros de  $A$  et de sa dérivée  $A'$ . On sait que  $0 < \dot{z}_1^a < z_1^a$ .

Nous introduisons aussi la fonction d'Airy de deuxième espèce notée classiquement  $B_i$  (voir [AS64]) ainsi que la fonction “inversée” associée  $B(x) := B_i(-x)$  (voir la figure 1.4).



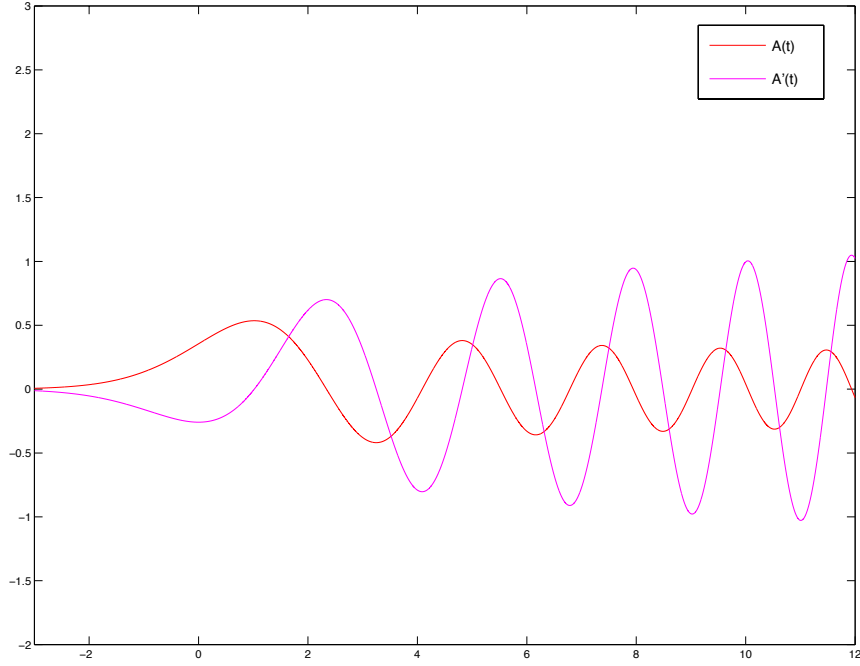


FIGURE 1.3 – La fonction d’Airy inversée  $A$  et sa dérivée  $A'$ . Leurs zéros forment deux suites entrelacées qui tendent vers  $+\infty$ .

**Lemme 1.6.** *Le spectre de  $\mathbf{a}$  est constitué de valeurs propres simples. Nous notons  $a_k$  la  $k$ -ième valeur propre. Alors on a*

$$\forall k \geq 1, \quad a_{2k-1} = \dot{z}_k^{\mathbf{a}} \quad \text{et} \quad a_{2k} = z_k^{\mathbf{a}}. \quad (1.21)$$

*Preuve :* En utilisant les mêmes arguments de symétrie que pour la preuve de la proposition 1.1, on se ramène à étudier les réalisations de Dirichlet et de Neumann de l’opérateur  $-\partial_t^2 + t$  sur  $[0, +\infty)$ . On utilise alors un argument de [DR11] : les solutions bornées de l’équation aux valeurs propres sur  $[0, +\infty)$  sont des translatées de la fonction d’Airy de première espèce. Traitons par exemple le cas de la réalisation de Neumann. Soit  $a_{2k-1}$  une valeur propre de  $\mathbf{a}$  et  $\phi_{2k-1}$  un vecteur propre pair associé (qui vérifie donc la condition de Neumann en 0). Alors  $\phi_{2k-1}$  vérifie l’équation différentielle

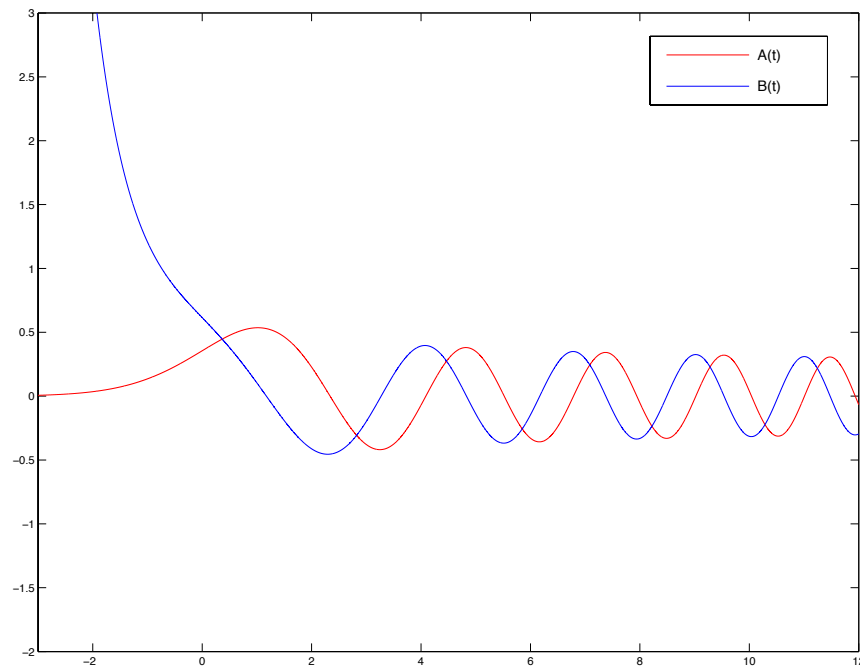
$$\forall t > 0, \quad -\phi_{2k-1}''(t) + t\phi_{2k-1}(t) = a_{2k-1}\phi_{2k-1}.$$

Ainsi on a nécessairement

$$\forall t > 0, \quad \phi_{2k-1}(t) = CA_i(t - a_{2k-1})$$

avec  $C$  une constante non nulle. La condition de Neumann en  $t = 0$  impose

$$A_i'(-a_{2k-1}) = 0,$$

FIGURE 1.4 – Les fonction d’Airy inversées  $A$  et  $B$ .

c’est-à-dire que  $a_{2k-1}$  est une racine de  $A'$ . Réciproquement la fonction  $t \rightarrow A_i(t - \dot{z}_k^a)$  est clairement un vecteur propre de la réalisation de Neumann de  $-\partial_t^2 + t$  sur  $[0, +\infty)$  associé à la valeur propre  $\dot{z}_k^a$ .  $\square$

Nous pouvons réaliser une asymptotique des valeurs propres à l'aide de cet opérateur modèle :

**Théorème 1.7.** *On a les développements asymptotiques suivants lorsque le paramètre  $\tau$  tend vers  $-\infty$  :*

$$\mu_k^N(\tau) = \tau^2 + 2^{2/3} \dot{z}_k^a |\tau|^{2/3} + o(|\tau|^{2/3}) \quad (1.22)$$

et

$$\mu_k^D(\tau) = \tau^2 + 2^{2/3} z_k^a |\tau|^{2/3} + o(|\tau|^{2/3}) . \quad (1.23)$$

*Preuve :* Nous cherchons le spectre de l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  quand le paramètre  $\tau$  tend

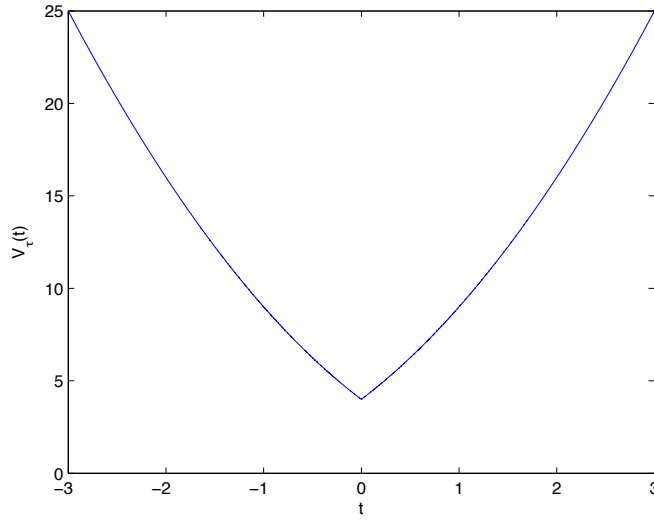


FIGURE 1.5 – Le potentiel  $V_\tau^{\text{sym}}$  pour  $\tau < 0$ , ici pour  $\tau = -2$ .

vers  $-\infty$ . Nous faisons la remarque suivante : pour  $\tau < 0$ , le potentiel  $V_\tau^{\text{sym}}$  admet un unique minimum (atteint en  $t = 0$ ) de valeur  $\tau^2$ . De plus ce minimum est singulier (voir la figure 1.5). Nous allons approcher le potentiel en ce point par ses tangentes. Nous retirons  $\tau^2$  au potentiel et nous travaillons ainsi avec l'opérateur

$$\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}} - \tau^2 = -\partial_t^2 - 2\tau|t| + t^2 .$$

Lorsque  $\tau \rightarrow -\infty$ , nous introduisons le paramètre semi-classique  $h^2 = -\tau^{-1}$  de sorte que l'on doit trouver (lorsque  $h$  tend vers 0) le spectre de l'opérateur

$$\frac{1}{h^2} (-h^2 \partial_t^2 + 2|t| + h^2 t^2) .$$

La procédure est décrite dans [DR11] : nous réalisons le changement d'échelle  $\tilde{t} = 2^{1/3} h^{-2/3} t$  et nous sommes ramenés à trouver le spectre de l'opérateur

$$h^{-2+2/3} 2^{2/3} (-\partial_{\tilde{t}}^2 + |\tilde{t}| + 2^{-4/3} h^{8/3} \tilde{t}^2) .$$

On note  $a_{k,h}^{\text{pert}}$  la  $k$ -ième valeur propre de l'opérateur  $\mathbf{a}^{\text{pert}} := -\partial_t^2 + |\tilde{t}| + 2^{-4/3}h^{8/3}\tilde{t}^2$ . L'opérateur dominant dans le développement en puissance de  $h$  est l'opérateur d'Airy  $\mathbf{a}$  et on a au sens des formes quadratiques :

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle \mathbf{a}^{\text{pert}} u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \geq \langle \mathbf{a} u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R})},$$

et donc par le principe du min-max on obtient  $a_{k,h}^{\text{pert}} \geq a_k$  pour tout  $h > 0$ . Pour la majoration, on prend une fonction propre  $\phi_k$  de  $\mathbf{a}$  comme quasi-mode. Comme  $\phi_k$  se déduit des fonctions d'Airy (cf. la preuve du lemme 1.6),  $\phi_k$  est à décroissance exponentielle et on a  $\|\mathbf{a}^{\text{pert}} \phi_k - a_k \phi_k\|_{L^2} = C_k h^{8/3}$  où  $C_k > 0$  est une constante. On déduit du théorème spectral que  $a_{k,h}^{\text{pert}} \leq a_k + C_k h^{8/3}$ . On a donc montré  $\lim_{h \rightarrow 0} a_{k,h}^{\text{pert}} = a_k$ . En utilisant  $h^2 = -\tau^{-1}$  on déduit un équivalent quand  $\tau$  tend vers  $-\infty$  du spectre de  $\mathbf{h}_\tau^{\text{sym}} - \tau^2$  à partir du lemme 1.6. On conclut avec la proposition 1.1.  $\square$

### 1.4.2 Le double puits symétrique : étude de l'effet tunnel

Nous réalisons maintenant une asymptotique des valeurs propres quand le paramètre  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . Pour comprendre la situation, on réalise un changement d'échelle  $x = t/\tau$  pour voir que l'opérateur  $\mathbf{h}_\tau^{\text{sym}}$  est unitairement équivalent à

$$\tau^2 \left( -\frac{1}{\tau^4} \partial_x^2 + (|x| - 1)^2 \right).$$

On pose cette fois-ci  $h = \tau^{-2}$ . Nous nous sommes ainsi ramenés à l'étude du spectre de l'opérateur défini sur  $B^2(\mathbb{R})$  par

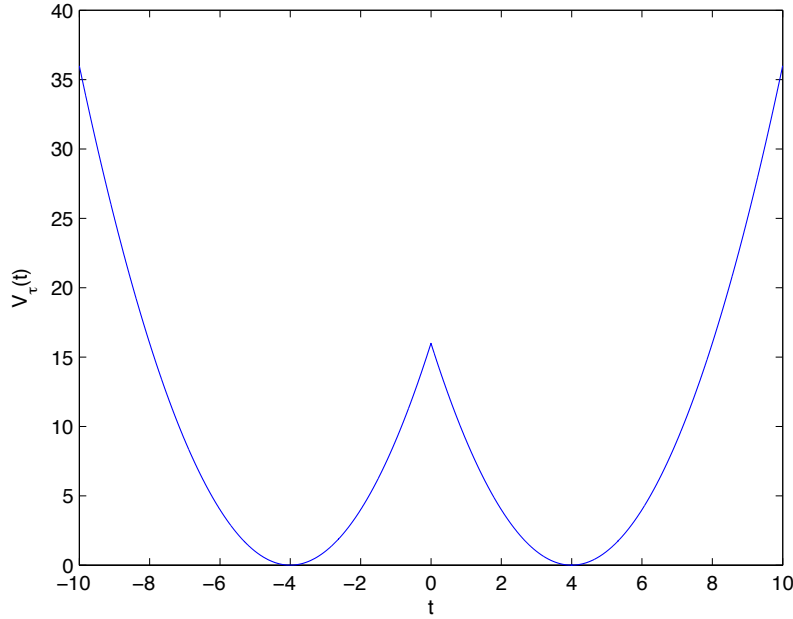
$$-h^2 \partial_x^2 + (|x| - 1)^2. \quad (1.24)$$

Il s'agit d'un opérateur de Schrödinger semi-classique avec un potentiel de type “double puits” (voir la figure 1.6). On s'attend donc à ce que ses valeurs propres se regroupent par paires exponentiellement proches d'après le phénomène appelé “effet tunnel” décrit par exemple dans [Har80], [Sim84], [HS84] ou encore [CDS83]. Dans [HS85, Proposition 1.1], les auteurs donnent une formule pour estimer l'écart entre les valeurs propres d'un opérateur unidimensionnel avec un potentiel en double puits sous l'hypothèse que ce potentiel est infiniment dérivable, ce qui n'est pas le cas ici, puisque le potentiel  $V_\tau$  n'est pas dérivable en  $t = 0$ . Nous allons calculer à la main un terme d'interaction pour décrire le spectre de l'opérateur  $\mathbf{h}_\tau^{\text{sym}}$  lorsque le paramètre  $\tau$  tend vers  $+\infty$ .

**Définition 1.8.** Nous définissons les réalisations de Neumann et de Dirichlet de l'oscillateur harmonique  $-\partial_t^2 + t^2$  sur le demi-axe  $(-\tau, +\infty)$ . Nous notons ces deux opérateurs  $\mathbf{h}_\tau^{\text{N,tr}}$  et  $\mathbf{h}_\tau^{\text{D,tr}}$ . Nous savons qu'ils sont unitairement équivalents à  $\mathbf{h}_\tau^{\text{N}}$  et  $\mathbf{h}_\tau^{\text{D}}$ .

Avant de réaliser un développement asymptotiques des valeurs propres quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ , rappelons que l'on sait déjà que les valeurs propres convergent exponentiellement vite vers leurs limites. En effet d'après [FHP11, proposition 2.2], on a une estimation pour la première valeur propre du problème de Neumann :

$$\forall \alpha \in (0, 1), \exists C_\alpha > 0, \forall \tau \geq 2, \quad |\mu^{\text{N}}(\tau) - 1| \leq C_\alpha e^{-\alpha \tau^2/2}.$$

FIGURE 1.6 – Le potentiel  $V_\tau^{\text{sym}}$  pour  $\tau > 0$ , ici pour  $\tau = 4$ .

La méthode consiste à construire un quasi-mode gaussien tronqué et à utiliser le théorème spectral. La fonction construite vérifie la condition de Dirichlet en 0 et son énergie est donc supérieure à 1 d'après (1.7). Cette technique ne permet donc pas d'estimer  $\mu_k^D(\tau) - \mu_k^N(\tau)$  pour  $\tau$  grand : les quasi-modes construits ne prennent pas en compte la condition au bord puisque celui-ci n'est pas dans le support des fonctions test. Pour améliorer cette asymptotique, nous allons perturber les fonctions d'Hermite par une fonction vérifiant l'équation d'Hermite et construire une fonction test qui vérifie la condition au bord pour l'opérateur sur  $(-\tau, +\infty)$ . Nous rappelons que  $\psi_k$  est la  $k$ -ième fonction d'Hermite, solution de l'équation d'Hermite (B.17). On sait que  $\psi_k$  est de la parité de  $k - 1$ . On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_k(t) = \gamma_k H_k(t) e^{-t^2/2}, \quad (1.25)$$

où  $H_k$  est le  $k$ -ième polynôme d'Hermite et  $\gamma_k$  est une constante de normalisation :

$$\gamma_k = (2^{k-1}(k-1)!\sqrt{\pi})^{-1/2}. \quad (1.26)$$

On rappelle que les coefficients de ces polynômes sont connus explicitement (voir par exemple [Sib75]). On aura besoin des deux coefficients de plus haut degré :

$$\forall k \geq 1, \quad H_k(t) = 2^{k-1}t^{k-1} - (k-1)(k-2)2^{k-3}t^{k-3} + r_{k-5}(t) \quad (1.27)$$

avec  $r_{k-5} \in \mathbb{R}_{k-5}[t]$  si  $k \geq 5$  et  $r_{k-5} = 0$  si  $k < 5$ . On retrouve par exemple  $H_1(t) = 1$ ,  $H_2(t) = 2t$  et  $H_3(t) = 4t^2 - 2$ . Nous allons chercher une autre solution de l'équation d'Hermite et trouver son développement asymptotique en l'infini. Nous allons utiliser des arguments de parité pour retrouver à la main une solution non colinéaire aux fonctions d'Hermite dont on connaît le développement. La construction va dépendre de la parité de

$k$ . Supposons par exemple que  $k$  est un nombre impair fixé. Alors on sait que  $\psi_k$  est une fonction paire. Nous regardons l'équation différentielle avec donnée initiale :

$$\begin{cases} -y''(t) + t^2 y(t) = (2k-1)y(t), & t \geq 0 \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (1.28a)$$

$$(1.28b)$$

L'espace des solutions est de dimension 1 et chaque solution non nulle peut se prolonger sur  $\mathbb{R}$  en une solution impaire de l'équation d'Hermite (B.17). Nous notons  $\phi_k$  l'un de ces prolongements. Puisque  $\psi_k$  est paire, la fonction  $\phi_k$  n'est pas colinéaire à  $\psi_k$ . On a donc que  $(\psi_k, \phi_k)$  forme une base des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation d'Hermite. Si  $k$  est pair, nous construisons une solution paire à (B.17) en remplaçant la condition (1.28b) par une condition de Neumann.

On va chercher à construire des quasi-modes pour les opérateurs  $\mathbf{h}_\tau^{\text{N,tr}}$  et  $\mathbf{h}_\tau^{\text{D,tr}}$  définis en (1.8) à partir des fonctions solutions de (B.17). Les quasi-modes en question seront des fonctions définies sur  $t \in (-\tau, +\infty)$  qui vérifieront la condition au bord en  $t = -\tau$ . Pour estimer l'énergie de ces quasi-modes quand  $\tau \rightarrow +\infty$ , on aura besoin de développements limités des fonctions  $\psi_k$  et  $\phi_k$  (ainsi que de leurs dérivées) lorsque  $t \rightarrow -\infty$  et  $t \rightarrow +\infty$ . On déduit de (1.27) un développement asymptotique de  $\psi_k$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$  :

$$\psi_k(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} \gamma_k 2^{k-1} t^{k-1} e^{-t^2/2} \left( 1 - \frac{(k-1)(k-2)}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right). \quad (1.29)$$

On a aussi

$$\psi'_k(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} \gamma_k 2^{k-1} t^k e^{-t^2/2} \left( -1 + \frac{(k-1)(k+2)}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right). \quad (1.30)$$

Nous effectuons un développement asymptotique de  $\phi_k$  quand  $t$  tend vers  $-\infty$ . Ces développements sont utilisés pour  $k = 1$  dans [Bol92].

**Lemme 1.9.** *Supposons que  $k$  soit impair (respectivement pair). Alors il existe une solution  $g_k$  impaire (respectivement paire) à l'équation (B.17) qui admet les développements suivants :*

$$g_k(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} \gamma_k^{-1} \frac{e^{t^2/2}}{2^k t^k} \left( 1 + \frac{k^2 + k}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right). \quad (1.31)$$

et

$$g'_k(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} \gamma_k^{-1} \frac{e^{t^2/2}}{2^k t^{k-1}} \left( 1 + \frac{k^2 - 3k}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right). \quad (1.32)$$

*Preuve :* On construit une autre solution de l'équation d'Hermite qui est linéairement indépendante de  $\psi_k$  à l'aide de la méthode de la variation de la constante. Soit  $t_0$  un réel qui n'est pas une racine de  $\psi_k$ . On suppose de plus que  $\psi_k$  n'a pas de racine sur  $(-\infty, t_0]$ , ce qui est possible puisque  $\psi_k$  possède un nombre fini de racines : il suffit en effet de prendre  $t_0$  négatif avec  $|t_0|$  suffisamment grand. On introduit

$$G_k(t) = \psi_k(t) \int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_k^2(u)} du, \quad t \in (-\infty, t_0].$$

On a

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_k^2(u)} du = \gamma_k^{-2} \int_{t_0}^t \frac{e^{u^2}}{H_k^2(u)} du .$$

Puisque la fonction sous l'intégrande n'est pas intégrable en  $-\infty$ , on en effectue un développement limité. On a quand  $u$  tend vers  $-\infty$  :

$$\begin{aligned} \frac{e^{u^2}}{H_k^2(u)} &= \frac{e^{u^2}}{2^{2k-2}u^{2k-2}} \left( \frac{1}{1 - 2^{-1}(k-1)(k-2)u^{-2} + O(u^{-4})} \right) \\ &= e^{u^2} \left( \frac{1}{2^{2k-2}u^{2k-2}} + \frac{(k-1)(k-2)}{2^{2k-1}u^{2k}} + O\left(\frac{1}{u^{2k+2}}\right) \right) . \end{aligned}$$

Or on a rapidement en réalisant des intégrations par parties que pour  $t_0 < 0$  et  $t \rightarrow -\infty$  :

$$\forall n \geq 0, \quad \int_{t_0}^t \frac{e^{u^2}}{u^n} du \underset{t \rightarrow -\infty}{=} \frac{e^{t^2}}{2t^{n+1}} + \frac{(n+1)e^{t^2}}{4t^{n+3}} + O\left(\frac{e^{t^2}}{t^{n+5}}\right) .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \gamma_k^{-2} \int_{t_0}^t \frac{e^{u^2}}{H_k^2(u)} du &= \gamma_k^{-2} e^{t^2} \left( \frac{1}{2^{2k-1}t^{2k-1}} + \left( \frac{2k-1}{2^{2k}} + \frac{(k-1)(k-2)}{2^{2k}} \right) \frac{1}{t^{2k+1}} + O\left(\frac{1}{t^{2k+3}}\right) \right) \\ &= \gamma_k^{-2} e^{t^2} \left( \frac{1}{2^{2k-1}t^{2k-1}} + \frac{k^2 - k + 1}{2^{2k}t^{2k+1}} + O\left(\frac{1}{t^{2k+3}}\right) \right) . \end{aligned}$$

Ainsi en multipliant ce développement par celui de  $\psi_k$ , on trouve

$$G_k(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} \gamma_k^{-1} \frac{e^{t^2/2}}{2^k t^k} \left( 1 + \frac{k^2 + k}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right) .$$

Il est clair  $G_k$  vérifie l'équation différentielle (B.17) sur  $(-\infty, t_0]$ . La fonction  $G_k$  se prolonge donc sur  $\mathbb{R}$  en une fonction solution de (B.17) et il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$G_k(t) = \alpha \psi_k(t) + \beta \phi_k(t) .$$

On pose  $g_k = \beta \phi_k$  et on déduit un développement asymptotique de  $g_k$  quand  $t$  tend vers  $-\infty$  :

$$g_k(t) = \gamma_k^{-1} \frac{e^{t^2/2}}{2^k t^k} \left( 1 + \frac{k^2 + k}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right) .$$

On déduit le développement asymptotique pour la dérivée annoncé en (1.32). Puisque  $\phi_k$  a la parité de  $k$ , on en déduit le lemme.  $\square$

A partir de la parité de  $g_k$  on déduit les développements suivants quand  $t$  tend vers  $+\infty$  :

$$|g_k(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \gamma_k^{-1} \frac{e^{t^2/2}}{2^k t^k} \left( 1 + \frac{k^2 + k}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right) \quad (1.33)$$

et

$$|g'_k(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \gamma_k^{-1} \frac{e^{t^2/2}}{2^k t^{k-1}} \left( 1 + \frac{k^2 - 3k}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \right) . \quad (1.34)$$

**Remarque 1.10.** On connaît deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (B.17) :  $D_{k-1}(i\sqrt{2}x)$  et  $D_{-k}(\sqrt{2}x)$  où  $D_\nu$  est la fonction parabolique cylindrique de Whittaker dont le développement est connu (voir [AS64] par exemple). Nous avons préféré présenter une démonstration complète des développements des fonctions  $\psi_k$  et  $g_k$  à partir de techniques élémentaires.

On effectue maintenant une asymptotique précise des valeurs propres de  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{N,tr}}$  et  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{D,tr}}$  :

**Théorème 1.11.** *On a une asymptotique à 3 termes pour la  $k$ -ième valeur propre des problèmes de Dirichlet et de Neumann lorsque le paramètre  $\tau$  tend vers  $+\infty$  :*

$$\mu_k^{\text{D}}(\tau) = 2k - 1 + \frac{2^k}{(k-1)!\sqrt{\pi}} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 1 - \frac{k^2 - k + 1}{2\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right) \quad (1.35)$$

et

$$\mu_k^{\text{N}}(\tau) = 2k - 1 - \frac{2^k}{(k-1)!\sqrt{\pi}} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 1 - \frac{k^2 - k - 1}{2\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right). \quad (1.36)$$

*Preuve :* On va construire des fonctions test sur  $(-\tau, +\infty)$  à l'aide de  $\psi_k$  et de  $g_k$ . Les fonctions construites vont vérifier la condition au bord en  $t = -\tau$  et seront donc dans les domaines des opérateurs. Nous allons estimer leur énergie puis utiliser le lemme de Temple : en effet on connaît déjà un “gap” grossier entre les valeurs propres lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$  d'après (1.6). Dans ce qui suit,  $k \geq 1$  est fixé et la notation de Landau  $O()$  précise le comportement des fonctions lorsque  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . Ces quantités ne sont pas nécessairement uniformes par rapport à  $k$ . Commençons par prouver l'asymptotique pour la valeur propre du problème de Dirichlet. Soit  $\chi$  une fonction de troncature infiniment dérivable définie sur  $[-1, +\infty)$  et vérifiant

$$\begin{cases} 0 \leq \chi(t) \leq 1, & t \geq -1 \\ \chi(t) = 1 & \text{si } t \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ \chi(t) = 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, +\infty). \end{cases}$$

Définissons la fonction de troncature dilatée  $\chi_\tau(t) = \chi(\frac{t}{\tau})$ . On a

$$\text{supp}(\chi_\tau) \subset [-\tau, \frac{\tau}{2}] \quad (1.37)$$

et

$$\text{supp}(\chi'_\tau) \subset [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]. \quad (1.38)$$

On a l'estimation suivante :

$$\exists C > 0, \forall \tau \in \mathbb{R}, \forall t \geq -\tau, \quad |\chi'_\tau(t)| \leq \frac{C}{\tau}. \quad (1.39)$$

Nous allons chercher comme dans [Bol92] un quasi-mode dans le domaine de  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{D,tr}}$  sous la forme

$$f_{\tau,k}(t) = \alpha \psi_k(t) + \beta g_k(t) \chi_\tau(t), \quad t \in [-\tau, +\infty) \quad (1.40)$$



où  $\alpha$  et  $\beta$  sont à déterminer en fonction de  $\tau$ . Notons que pour  $k$  fixé, si  $\tau$  est suffisamment grand, on a  $g_k(-\tau) \neq 0$ . La condition de Dirichlet

$$f_{\tau,k}(-\tau) = 0 \quad (1.41)$$

permet de trouver

$$\beta = -\frac{\alpha\psi_k(-\tau)}{g_k(-\tau)}. \quad (1.42)$$

On utilise alors les développements (1.29) et (1.31) pour trouver

$$\beta \underset{\tau \rightarrow +\infty}{=} \alpha \gamma_k^2 2^{2k-1} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 1 - \frac{2k^2 - 2k + 2}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right). \quad (1.43)$$

Nous déterminons ensuite  $\alpha$  afin de normaliser  $f_{\tau,k}$ . On commence par estimer

$$\|\psi_k\|_{L^2((-\tau, +\infty))}^2 = 1 - \int_{-\infty}^{-\tau} |\psi_k(t)|^2 dt.$$

Soit en utilisant (1.29) et une intégration par parties :

$$\|\psi_k\|_{L^2((-\tau, +\infty))}^2 = 1 + O\left(\tau^{2k-3} e^{-\tau^2}\right).$$

On développe ensuite la norme du quasi-mode introduit en (1.40) en utilisant (1.37) :

$$\begin{aligned} \|f_{\tau,k}\|_{L^2((-\tau, +\infty))}^2 &= \alpha^2 \left( 1 + O\left(\tau^{2k-3} e^{-\tau^2}\right) \right) \\ &\quad + 2\alpha\beta \int_{-\tau}^{\tau/2} \psi_k(t) g_k(t) \chi_\tau(t) dt + \beta^2 \int_{-\tau}^{\tau/2} g_k^2(t) \chi_\tau^2(t) dt. \end{aligned}$$

En majorant grossièrement  $\psi_k$  et  $g_k$  grâce à (1.29) et (1.31), on trouve en utilisant (1.43) que

$$2\alpha\beta \int_{-\tau}^{\tau/2} \psi_k(t) g_k(t) \chi_\tau(t) dt = \alpha^2 O\left(\tau^{2k-1} e^{-\tau^2}\right).$$

De même on trouve

$$\beta^2 \int_{-\tau}^{\tau/2} g_k^2(t) \chi_\tau^2(t) dt = \alpha^2 O\left(\tau^{2k-1} e^{-\tau^2}\right).$$

Ainsi on peut choisir  $\alpha$  tel que  $\|f_{\tau,k}\|_{L^2((-\tau, +\infty))}^2 = 1$  et

$$\alpha = 1 + O\left(\tau^{2k-1} e^{-\tau^2}\right). \quad (1.44)$$

Par construction,  $f_{\tau,k}$  vérifie la condition de Dirichlet au bord. De plus elle est clairement dans  $B^2((-\tau, +\infty))$  puisqu'elle est égale à la fonction d'Hermite  $\psi_k$  dès que  $t \geq \frac{\tau}{2}$ . On a donc  $f_{\tau,k} \in \text{Dom}(\mathbf{h}_\tau^{\text{D, tr}})$  et on peut calculer l'énergie du quasi-mode  $f_{\tau,k}$  définie par

$$\eta_{\tau,k} = \langle \mathbf{h}_\tau^{\text{D, tr}} f_{\tau,k}, f_{\tau,k} \rangle_{L^2((-\tau, +\infty))}.$$

On évalue donc

$$\begin{aligned}
\eta_{\tau,k} - (2k - 1) &= \langle \mathbf{h}_{\tau}^{\text{D, tr}} f_{\tau,k} - (2k - 1)f_{\tau,k}, f_{\tau,k} \rangle_{L^2((-\tau, +\infty))} \\
&= \langle \beta \mathbf{h}_{\tau}^{\text{D, tr}} (\chi_{\tau} g_k) - (2k - 1)\beta \chi_{\tau} g_k, f_{\tau,k} \rangle_{L^2((-\tau, +\infty))} \\
&= \beta \int_{-\tau}^{+\infty} \left( -(\chi_{\tau} g_k)''(t) + t^2 \chi_{\tau}(t) g_k(t) - (2k - 1)\chi_{\tau}(t) g_k(t) \right) f_{\tau,k}(t) dt \\
&= -\beta \left[ (\chi_{\tau} g_k)' f_{\tau,k} \right]_{-\tau}^{+\infty} \\
&\quad + \beta \int_{-\tau}^{+\infty} (\chi_{\tau} g_k)'(t) f'_{\tau,k}(t) + (t^2 - (2k - 1)) \chi_{\tau}(t) g_k(t) f_{\tau,k}(t) dt .
\end{aligned}$$

Le terme de bord est nul puisque  $f_{\tau,k}$  vérifie la condition de Dirichlet (1.41). On refait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\eta_{\tau,k} - (2k - 1) &= \beta \left[ \chi_{\tau} g_k f'_{\tau,k} \right]_{-\tau}^{+\infty} + \beta \int_{-\tau}^{+\infty} \chi_{\tau}(t) g_k(t) \left( -f''_{\tau,k}(t) + (t^2 - (2k - 1)) f_{\tau,k}(t) \right) dt \\
&= -\beta g_k(-\tau) f'_{\tau,k}(-\tau) + \beta \int_{-\tau}^{+\infty} \chi_{\tau}(t) g_k(t) r_{\tau,k}(t) dt
\end{aligned}$$

avec

$$r_{\tau,k}(t) := \mathbf{h}_{\tau}^{\text{D, tr}} f_{\tau,k} - (2k - 1)f_{\tau,k} . \quad (1.45)$$

Un calcul de commutateurs fournit rapidement

$$r_{\tau,k}(t) = -\beta \chi_{\tau}'' g_k - 2\beta \chi_{\tau}' g_k' .$$

On utilise alors que les supports de  $\chi_{\tau}'$  et de  $\chi_{\tau}''$  sont inclus dans  $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ . On a donc

$$\eta_{\tau,k} - (2k - 1) = -\beta g_k(-\tau) f'_{\tau,k}(-\tau) - \beta^2 \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\tau/2} \chi_{\tau}(t) g_k(t) (\chi_{\tau}''(t) g_k(t) + 2\chi_{\tau}'(t) g_k'(t)) dt . \quad (1.46)$$

En utilisant (1.31), (1.32), (1.33) et (1.34) on a grossièrement pour  $t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$  :

$$g_k(t) = O\left(\frac{1}{\tau^k} e^{\tau^2/8}\right) \text{ et } g_k'(t) = O\left(\frac{1}{\tau^{k-1}} e^{\tau^2/8}\right) . \quad (1.47)$$

En utilisant que  $\chi_{\tau}'$  et  $\chi_{\tau}''$  sont bornés on déduit l'estimation grossière quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$  :

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\tau/2} \chi_{\tau}(t) g_k(t) (\chi_{\tau}''(t) g_k(t) + 2\chi_{\tau}'(t) g_k'(t)) dt = O\left(\frac{1}{\tau^{2k-2}} e^{\tau^2/4}\right)$$

puis en combinant cela avec (1.43), (1.44) et (1.46), on a

$$\eta_{\tau,k} - (2k - 1) = -\beta g_k(-\tau) f'_{\tau,k}(-\tau) + O\left(\tau^{2k} e^{-7\tau^2/4}\right) . \quad (1.48)$$

On réalise maintenant un développement du terme d'interaction

$$\begin{aligned}
f'_{\tau,k}(-\tau) &= \alpha \psi_k'(-\tau) + \beta g_k'(-\tau) \\
&= \alpha \gamma_k 2^{k-1} (-1)^{k-1} \tau^k e^{-\tau^2/2} \left( 2 - \frac{2k(k+1)}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right) .
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\beta g_k(-\tau) = \alpha \gamma_k 2^{k-1} (-1)^k \tau^{k-1} e^{-\tau^2/2} \left( 1 + \frac{(-k+1)(k-2)}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right).$$

On a finalement en utilisant (1.44) :

$$-\beta g_k(-\tau) f'_{\tau,k}(-\tau) = \gamma_k^2 2^{2k-2} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 2 - \frac{4k^2 - 4k + 4}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right).$$

Le terme dominant dans (1.48) est bien le terme de bord, et on a donc montré :

$$\eta_{\tau,k} - (2k - 1) = \gamma_k^2 2^{2k-2} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 2 - \frac{4k^2 - 4k + 4}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right). \quad (1.49)$$

Ce qui précède permet aussi d'estimer le reste  $r_{\tau,k}$  défini en (1.45) : puisque

$$\text{supp}(r_{\tau,k}) \subset \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right],$$

on a en utilisant (1.43) et (1.47)

$$\|r_{\tau,k}\|_{L^2((-\tau, +\infty))}^2 = O\left(\tau^{2k+1} e^{-7\tau^2/4}\right).$$

En vue d'appliquer le lemme de Temple, on estime l'erreur

$$\epsilon_{\tau,k} = \|\mathbf{h}_\tau^{\text{D, tr}} f_{\tau,k} - \eta_{\tau,k} f_{\tau,k}\| \leq \|r_{\tau,k}\|_{L^2((-\tau, +\infty))} + |(2k - 1) - \eta_{\tau,k}|$$

de sorte que l'on trouve

$$\epsilon_{\tau,k}^2 = O\left(\tau^{2k+1} e^{-7\tau^2/4}\right).$$

Puisque  $\mu_k^{\text{D}}(\tau)$  tend vers  $2k - 1$  quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ , on a que pour  $\tau$  assez grand,  $\mu_k^{\text{D}}(\tau)$  est la seule valeur propre de  $\mathbf{h}_\tau^{\text{D, tr}}$  dans l'intervalle  $(2k - \frac{3}{2}, 2k - \frac{1}{2})$ . On applique la proposition A.3 avec l'énergie  $\eta = \eta_{\tau,k}$  et l'erreur  $\epsilon = \epsilon_{\tau,k}$  pour obtenir l'asymptotique

$$\mu_k^{\text{D}}(\tau) = 2k - 1 + \gamma_k^2 2^{2k-2} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 2 - \frac{4k^2 - 4k + 4}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right).$$

On déduit l'asymptotique (1.35) en remplaçant  $\gamma_k$  par sa valeur définie en (1.26). La preuve pour la valeur propre du problème de Neumann est sensiblement la même, c'est pourquoi nous adaptons ce qui précède en gardant les mêmes notations. Nous utilisons cette fois-ci la condition  $f'_{\tau,k}(-\tau) = 0$  pour construire notre quasi-mode. La condition (1.41) est à remplacer par

$$\beta = -\alpha \frac{\psi'_k(-\tau)}{g'_k(-\tau)} = \alpha \gamma_k^2 2^{2k-1} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( -1 + \frac{2k^2 - 2k - 2}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right).$$

L'évaluation de l'énergie fait apparaître un terme de bord différent :

$$\eta_{\tau,k} - (2k - 1) = \beta g'_k(-\tau) f_{\tau,k}(-\tau) - \beta^2 \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\tau/2} \chi_\tau(t) g_k(t) (\chi''_\tau(t) g_k(\tau) + 2\chi'_\tau(t) g'_k(t)) dt.$$

On montre exactement de la même manière que plus haut que le terme intégrale est en  $O(e^{-\gamma\tau^2})$  avec  $\gamma > 1$ , il est donc négligeable devant le terme de bord que l'on calcule. On a d'abord

$$f_{\tau,k}(-\tau) = \gamma_k 2^{k-1} (-1)^{k-1} \tau^{k-1} e^{-\tau^2/2} \left( 2 + \frac{-2k^2 + 6k}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right)$$

puis

$$\beta g'_k(-\tau) = \gamma_k 2^{k-1} (-1)^{k-1} \tau^k e^{-\tau^2/2} \left( -1 + \frac{k^2 + k - 2}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right).$$

On a donc

$$\beta g'_k(-\tau) f_{\tau,k}(-\tau) = -\gamma_k^2 2^{2k-2} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 2 - \frac{4k^2 - 4k - 4}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right).$$

La suite est exactement la même que pour le problème de Dirichlet : le lemme de Temple permet d'aboutir à (1.36)  $\square$

**Remarque 1.12.** Remarquons que nous avons pris une troncature à support dans  $-\tau \leq t \leq \frac{\tau}{2}$  et que sa dérivée était supportée dans  $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$ . Dans la preuve du théorème on pourrait choisir une troncature  $\chi_\tau$  telle que  $\text{supp}(\chi'_\tau) \subset [a\tau, b\tau]$  avec  $-1 < a < b < 1$  : l'estimation (1.48) devient alors

$$\eta_{\tau,k} - (2k - 1) = -\beta g_k(-\tau) f'_{\tau,k}(-\tau) + O\left(\tau^{2k} e^{(-2+\delta)\tau^2}\right)$$

avec  $\delta = \max(a^2, b^2)$ . La condition suffisante pour que la preuve reste valide est donc  $\delta < 1$ . Remarquons que plus  $\delta$  est petit, plus le terme de reste est exponentiellement petit.

On peut maintenant estimer l'effet tunnel pour les valeurs propres de l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  :

**Corollaire 1.13.** Les valeurs propres de  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  se regroupent en paires exponentiellement proches  $(\mu_k^N(\tau), \mu_k^D(\tau))$  quand le paramètre  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . Nous définissons le splitting comme l'écart entre ces valeurs propres :

$$E_k(\tau) = \mu_k^D(\tau) - \mu_k^N(\tau).$$

Alors on a l'asymptotique suivante lorsque  $\tau$  tend vers  $+\infty$  :

$$E_k(\tau) = \frac{2^{k+1}}{(k-1)!\sqrt{\pi}} \tau^{2k-1} e^{-\tau^2} \left( 1 - \frac{k^2 - k}{2\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right) \right). \quad (1.50)$$

On rappelle que le problème étudié est équivalent à trouver les valeurs propres de l'opérateur

$$\frac{1}{h^2} (-h^2 \partial_x^2 + (|x| - 1)^2) \quad (1.51)$$

quand  $h$  tend vers 0. Voici une brève description du résultat énoncé dans [HS85, proposition 1.1]. Soit  $V$  un potentiel symétrique infiniment dérivable ayant deux minima quadratiques en  $x = -a$  et  $x = a$ . Les auteurs proposent un développement explicite pour le spectre de  $-h^2\partial_x^2 + V$  pour  $x \in \mathbb{R}$  : quand  $h$  tend vers 0, les valeurs propres se regroupent par paires exponentiellement proches  $(\lambda_{2k-1}(h), \lambda_{2k}(h))_{k \geq 1}$  et le développement asymptotique du splitting des valeurs propres lorsque  $h$  tend vers 0 est le suivant

$$\lambda_{2k}(h) - \lambda_{2k-1}(h) \sim e^{-S_0/h} h^{3/2-k} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j^k h^j \quad (1.52)$$

avec

$$S_0 = \int_{-a}^a \sqrt{V(x)} dx \quad (1.53)$$

la distance d'Agmon entre les deux puits. On peut expliciter le premier terme de l'asymptotique :

$$\alpha_0^k = \frac{2^{k+1} \sqrt{V(0)}}{(k-1)! \sqrt{\pi}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{2k-2} \exp \left( -2 \int_0^{a-\epsilon} \frac{\sqrt{V'} - (2k-1)}{2\sqrt{V}} dt \right). \quad (1.54)$$

Bien que ce résultat ne soit pas applicable à l'opérateur défini en (1.51) (puisque le potentiel n'est pas dérivable en 0), les formules qui définissent  $S_0$  et  $\alpha_0^k$  gardent un sens pour le potentiel  $V(x) = (|x| - 1)^2$ . En les appliquant, on obtient

$$S_0 = 1$$

et

$$\alpha_0^k = \frac{2^{k+1}}{(k-1)! \sqrt{\pi}}.$$

Si nous utilisons l'asymptotique (1.52) pour l'opérateur défini en (1.51) sans se soucier de la régularité du potentiel, on retrouve bien le premier terme du développement que nous avons montré en (1.50) en posant  $h = \tau^{-2}$ . On retrouve aussi les mêmes puissances de  $h$  dans les termes suivants. Pourtant les méthodes BKW qui permettent de montrer [HS85, Proposition 1.1] ne fonctionnent pas *a priori* car le potentiel  $V$  est singulier ici, en outre les coefficients  $(\alpha_j^k)_{j \geq 1}$  dans l'asymptotique (1.52) font intervenir les dérivées d'ordre supérieur du potentiel en 0, or ces quantités ne sont pas définies pour l'opérateur (1.51). Notre méthode permet de calculer une asymptotique précise des valeurs propres indépendamment de la régularité du potentiel et il serait intéressant de la généraliser pour d'autres potentiels singuliers.

On peut remarquer que les deuxièmes termes dans les asymptotiques de  $\mu_k^N(\tau)$  et  $\mu_k^D(\tau)$  se compensent :

**Corollaire 1.14.** *Lorsque  $\tau$  tend vers  $+\infty$ , les paires de valeurs propres de l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^{\text{sym}}$  sont centrées autour des niveaux de Landau de l'oscillateur harmonique. En effet, définissons la moyenne des valeurs propres comme*

$$m_k(\tau) := \frac{\mu_k^N(\tau) + \mu_k^D(\tau)}{2}.$$

Alors on a

$$m_k(\tau) = 2k - 1 - \frac{2^{k-1}}{(k-1)!\sqrt{\pi}} \tau^{2k-3} e^{-\tau^2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right) \right). \quad (1.55)$$

On voit ainsi que les moyennes des valeurs propres des problèmes de Neumann et de Dirichlet sont très proches des valeurs limites  $2k - 1$ . On remarque que cette moyenne est inférieure à la valeur limite du problème modèle. On peut comparer les ordres de grandeur des deux effets observés : définissons

$$p_k(\tau) := \frac{m_k(\tau) - (2k - 1)}{E_k(\tau)}. \quad (1.56)$$

Le premier terme de l'asymptotique de  $p_k(\tau)$  ne dépend pas du niveau d'énergie  $k$  :

$$p_k(\tau) \underset{\tau \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{4\tau^2}. \quad (1.57)$$

Si on exprime ce rapport en fonction du paramètre semi-classique  $h = \tau^{-2}$ , alors il est de l'ordre de grandeur de  $h$ . Encore une fois il serait intéressant de généraliser cela en étudiant la moyenne de deux problèmes aux valeurs propres de Neumann et de Dirichlet et de les comparer à un problème modèle sur  $\mathbb{R}$ . Nous donnerons dans la section suivante un autre exemple explicite illustrant ces phénomènes.

### 1.4.3 Simulations numériques

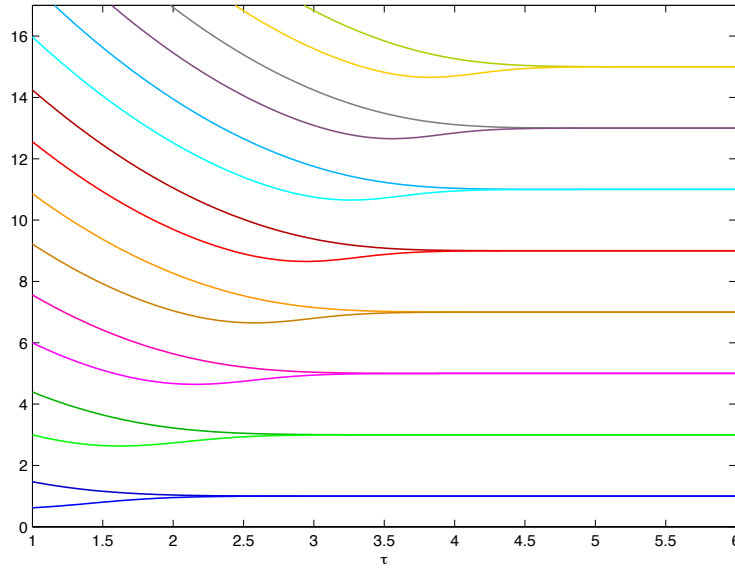


FIGURE 1.7 – Les valeurs propres  $\check{\mu}_k^N(\tau)$  et  $\check{\mu}_k^D(\tau)$  selon  $\tau \in [1, 6]$  pour  $k = 1, \dots, 8$ .

Nous calculons le spectre des opérateurs  $\mathbf{h}_\tau^N$  et  $\mathbf{h}_\tau^D$  à l'aide de librairie d'éléments finis MELINA (voir [Mar10]). Pour illustrer les asymptotiques montrées plus haut lorsque  $\tau$  tend vers  $+\infty$ , nous prendrons  $\tau \in [1, 6]$ . Pour des valeurs de  $\tau$  plus grandes, l'effet tunnel à détecter pour la première paire de valeurs propres est inférieur à un ordre de  $10^{-11}$ , et nos simulations n'ont plus la précision suffisante pour capter le phénomène.

#### Tronquer le domaine d'intégration

Il faut dans un premier temps borner le domaine d'intégration. L'idée est de raisonner sur un domaine borné  $[0, L]$  suffisamment grand en imposant une condition de Dirichlet en  $t = L$ . Puisque les vecteurs propres des opérateurs  $\mathbf{h}_\tau^N$  et  $\mathbf{h}_\tau^D$  décroissent exponentiellement vite quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , on s'attend à ce que les valeurs propres du problème sur  $[0, L]$  convergent vers les valeurs propres du problème sur  $[0, +\infty)$  quand  $L$  tend vers  $+\infty$ . Soit donc  $L > 0$  et soit  $\mu^N(\tau, L)$  (respectivement  $\mu^D(\tau, L)$ ) la plus petite valeur propre de l'opérateur  $-\partial_t^2 + (t - \tau)^2$  sur l'intervalle  $[0, L]$  avec des conditions de Neumann (respectivement Dirichlet) en  $t = 0$  et de Dirichlet en  $t = L$ . Alors par injection des domaines de formes, on a clairement que pour tout réel  $\tau$ , les fonctions  $L \rightarrow \mu^N(\tau, L)$

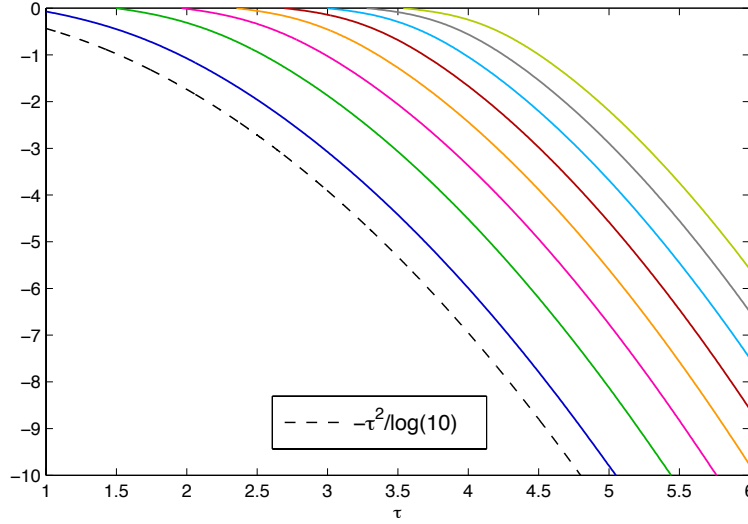


FIGURE 1.8  $-\log_{10}(\check{E}_k(\tau))$  selon  $\tau \in [1, 6]$  pour  $k = 1, \dots, 8$  et la parabole  $-\tau^2$ .

et  $L \rightarrow \mu^D(\tau, L)$  sont décroissantes sur  $\mathbb{R}$ . Puisque les fonctions propres de  $\mathbf{h}_\tau^N$  et  $\mathbf{h}_\tau^D$  sont concentrées dans le puits du potentiel  $(t - \tau)^2$ , on a (voir [Bol92] ou plus récemment [BN12]) :

$$\forall \alpha \in (0, 1), \exists C_\alpha > 0, \forall \tau \in \mathbb{R}, \forall L > 0, \quad |\mu^N(\tau, L) - \mu^N(\tau)| < C_\alpha e^{-\alpha(L-\tau)^2/2}, \quad (1.58)$$

c'est-à-dire que la plus petite valeur propre du problème de Neumann tronqué avec condition de Dirichlet en  $t = L$  converge exponentiellement vite vers  $\mu^N(\tau)$  quand  $L$  tend vers  $+\infty$ . Nous avons clairement des estimations semblables pour des valeurs propres autres que la première, ainsi que pour les valeurs propres  $\mu_k^D$  du problème de Dirichlet. Après plusieurs essais sur la valeur de  $L$ , nous avons choisi  $L = 20$  : l'erreur due à la troncature est alors négligeable devant l'ordre de grandeur des effets que nous souhaitons observer.

### Configuration choisie pour les calculs

Nous utilisons des méthodes d'éléments finis conformes qui aboutissent à des projections de Galerkin sur un espace de dimension finie. Cet espace de dimension finie est inclus dans le domaine de forme. Les valeurs propres calculées numériquement sont donc toujours supérieures aux valeurs propres théoriques. Ainsi lorsque nous calculons des valeurs propres nous garderons la configuration de calcul qui a donné les valeurs propres les plus basses. La librairie d'éléments finis MELINA nous permet de monter en degré, nous avons donc choisi d'utiliser 200 éléments finis de taille 0.1 et de degré  $\mathbb{P}_{10}$  pour mailler l'intervalle  $[0, 20]$ . Nous avons fait au préalable des tests pour voir quelle configuration donnait les résultats les plus précis à degré de liberté fixé. Il est apparu que si on prenait 2000 éléments de degré  $\mathbb{P}_1$ , les valeurs propres étaient moins précises qu'avec la configuration que nous avons prise : la première valeur propre était en effet supérieure de  $10^{-6}$  à celle calculée avec 200 éléments de degré  $\mathbb{P}_{10}$ . Nous notons  $\check{\mu}_k^N(\tau)$  (respectivement



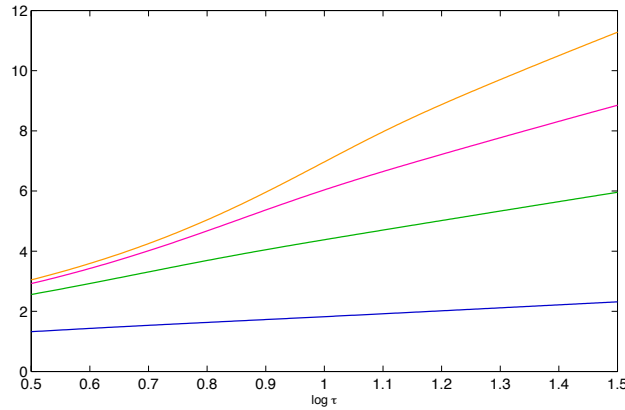


FIGURE 1.9  $-\log(\check{E}_k(\tau)) + \tau^2$  selon  $\log(\tau)$  pour  $\tau \in [1.5, 4.5]$  et  $k = 1, \dots, 4$ .

$\check{\mu}_k^D(\tau)$ ) la  $k$ -ième valeur propre calculée numériquement (nous calculons les 8 premières valeurs propres). Comme le calcul est rapide (environ 1 seconde par valeur de  $\tau$ ), nous prenons un pas de 0.01 pour les valeurs du paramètre  $\tau$ . Nous représenterons ainsi les valeurs obtenues numériquement par des courbes continues.

## Résultats

La figure 1.7 représente les courbes  $\tau \rightarrow \check{\mu}_k^N(\tau)$  et  $\tau \rightarrow \check{\mu}_k^D(\tau)$  pour  $\tau \in [1, 6]$  et  $k = 1, \dots, 8$ . On remarque que l'on a bien  $\check{\mu}_k^N(\tau) < \check{\mu}_k^D(\tau)$  et que la convergence vers les entiers impairs n'est pas uniforme par rapport à  $k$ .

Nous notons

$$\check{E}_k(\tau) = \check{\mu}_k^D(\tau) - \check{\mu}_k^N(\tau)$$

l'effet tunnel observé numériquement. D'après (1.50), on a les asymptotiques théoriques

$$\log_{10}(E_k(\tau)) = -\frac{\tau^2}{\log(10)} + O(1) \quad (1.59)$$

et

$$\log(E_k(\tau)) = -\tau^2 + (2k-1)\log \tau + R_k + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right) \quad (1.60)$$

avec  $R_k = \log\left(\frac{2^{k+1}}{(k-1)!\sqrt{\pi}}\right)$ . On observe sur la figure 1.8 que le premier terme de la quantité  $\log_{10}(\check{E}_k(\tau))$  se comporte bien comme  $\tau \rightarrow \frac{-\tau^2}{\log(10)}$ . On vérifie sur la figure 1.9 que

$$\log(\tau) \rightarrow \log(\check{E}_k(\tau)) + \tau^2$$

se comporte asymptotiquement comme une fonction affine, ce qui confirme l'asymptotique théorique (1.60). Afin d'extraire la pente nous regardons les quotients différentiels

$$\check{d}_k(\tau_j) := \frac{\log(\check{E}_k(\tau_j)) + \tau_j^2 - \log(\check{E}_k(\tau_{j-1})) - \tau_{j-1}^2}{\log(\tau_j) - \log(\tau_{j-1})}$$

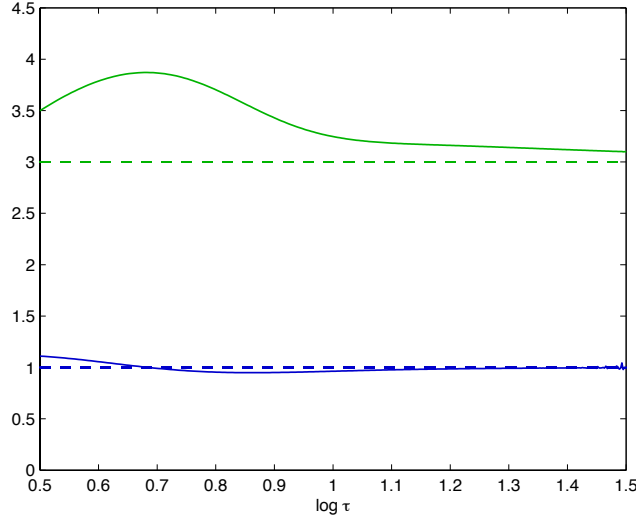


FIGURE 1.10 – La pente de  $\log(\check{E}_k(\tau)) + \tau^2$  selon  $\log(\tau)$  pour  $\tau \in [1.5, 4.5]$  et  $k = 1, 2$ . Elle converge bien vers  $2k - 1$ .

où les  $(\tau_j)_j$  sont les points de discrétisation. La pente  $\check{d}_k(\tau_j)$  doit converger vers la valeur  $(2k - 1)$  d'après (1.60). Cela se voit bien sur la figure 1.10 pour  $k = 1, 2$ . On vérifie sur la figure 1.11 que

$$\check{R}_k(\tau) = \log(\check{E}_k(\tau)) + \tau^2 - (2k - 1)\log(\tau)$$

converge vers  $R_k$ . On s'intéresse maintenant au rapport  $p_k(\tau)$  dont la convergence est décrite en (1.57). On trace sur la figure 1.12 le rapport  $\check{p}_k(\tau)$  pour  $k = 1, \dots, 4$  et on constate qu'il tend bien vers 0 comme  $-\tau^{-2}/4$ , mais que cette convergence n'est pas uniforme par rapport à  $k$ . On montre aussi sur la figure 1.13 que si on prend des valeurs de  $\tau$  plus grandes, l'effet tunnel est numériquement proche de la limite double précision et le quotient numérique  $\check{p}_k(\tau)$  “décroche” de l'asymptotique prévue. On constate que lorsque  $k$  augmente, les calculs de  $\check{p}_k(\tau)$  décrochent pour des valeurs de  $\tau$  plus grandes. Ceci est dû au fait que la convergence n'est pas uniforme par rapport à  $k$ .

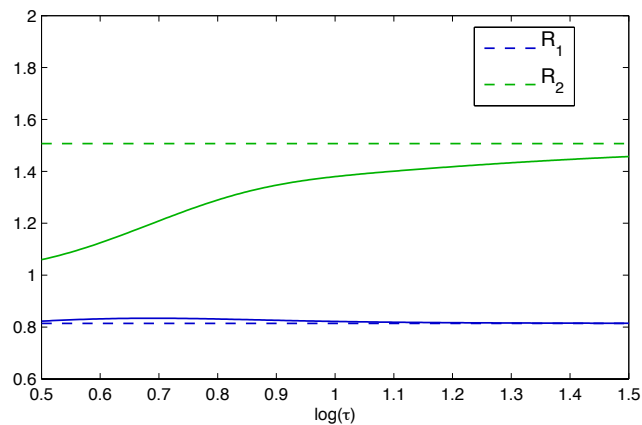


FIGURE 1.11 – La convergence de  $\check{R}_k(\tau)$  vers  $R_k := \log\left(\frac{2^{k+1}}{(k-1)!\sqrt{\pi}}\right)$  pour  $\tau \in [1.5, 4.5]$  et  $k = 1, 2$ .

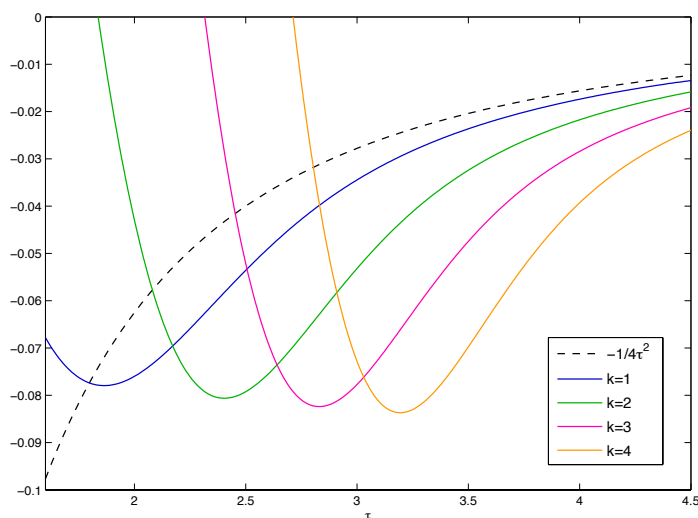


FIGURE 1.12 – La convergence du rapport  $\check{p}_k(\tau)$  de la moyenne et du splitting vers 0 comme  $-\frac{1}{4\tau^2}$  pour  $\tau \in [1.5, 4.5]$  et  $k = 1, \dots, 4$ . On voit que la convergence n'est pas uniforme par rapport à  $k$ .

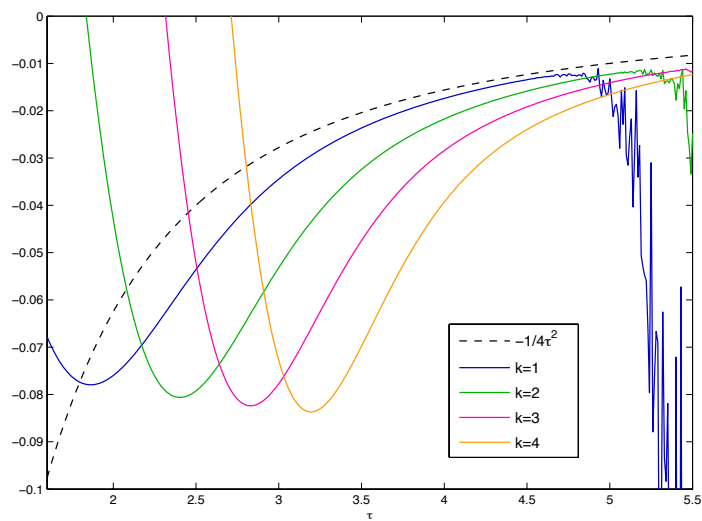


FIGURE 1.13 – La convergence du rapport  $\check{p}_k(\tau)$  de la moyenne et du splitting vers 0 comme  $-\frac{1}{4\tau^2}$  pour  $\tau \in [1.5, 5.5]$ . On voit que les calculs “décrochent” si  $\tau$  est trop grand.

## 1.5 Etude d'un opérateur de Schrödinger semi-classique avec un potentiel en pic

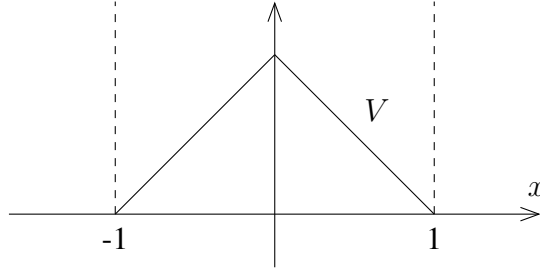


FIGURE 1.14 – Le potentiel  $V$  sur  $[-1, 1]$ .

Nous nous intéressons à un nouveau problème aux valeurs propres. Soit  $V(x)$  le potentiel défini sur  $[-1, 1]$  par

$$V(x) := -|x| + 1.$$

On observe que le potentiel  $V$  est symétrique et possède deux minima “affines” (voir la figure 1.14). On regarde les paires propres de la réalisation de Dirichlet de

$$\mathfrak{w}_h := -h^2 \partial_x^2 + V$$

sur  $[-1, 1]$  lorsque le paramètre semi-classique  $h$  tend vers 0. Cet opérateur est à résolvante compacte et nous notons  $\lambda_k(h)$  la  $k$ -ième valeur propre. Nous introduisons l'intervalle

$$I_h := [-h^{-2/3}, 0].$$

Soit  $\mathfrak{w}_h^N$  l'opérateur défini par

$$-\partial_t^2 - t, \quad t \in I_h \tag{1.61}$$

avec conditions de Dirichlet en  $t = 0$  et Neumann en  $t = -h^{-2/3}$ . Nous notons  $\lambda_k^N(h)$  sa  $k$ -ième valeur propre. De même nous introduisons  $\mathfrak{w}_h^D$  l'opérateur défini par (1.61) avec condition de Dirichlet en  $t = 0$  et en  $t = -h^{-2/3}$ . Nous notons  $\lambda_k^D(h)$  sa  $k$ -ième valeur propre.

**Proposition 1.15.** *On a une relation entre les spectres de  $\mathfrak{w}_h$ ,  $\mathfrak{w}_h^D$  et  $\mathfrak{w}_h^N$  :*

$$\forall k \geq 1, \quad \lambda_{2k-1}(h) = h^{2/3} \lambda_k^N(h)$$

et

$$\forall k \geq 1, \quad \lambda_{2k}(h) = h^{2/3} \lambda_k^D(h).$$

*Preuve :* Puisque le potentiel  $V$  est symétrique et que les valeurs propres de  $\mathfrak{w}_h$  sont simples, on sait que les fonctions propres associées sont alternativement paires et

impaires. En reprenant la preuve de la proposition 1.1, on montre qu’il suffit d’étudier d’une part l’opérateur

$$-h^2 \partial_x^2 + 1 - x, \quad x \in [0, 1] \quad (1.62)$$

avec des conditions de Dirichlet en  $x = 1$  et Neumann en  $x = 0$ , d’autre part l’opérateur défini par (1.62) avec des conditions de Dirichlet en  $x = 1$  et  $x = 0$ . En réalisant le changement de variable  $t = h^{-2/3}(x - 1)$ , on voit que ces opérateurs sont unitairement équivalents aux opérateurs  $h^{2/3} \mathfrak{w}_h^N$  et  $h^{2/3} \mathfrak{w}_h^D$  sur  $t \in I_h$ .  $\square$

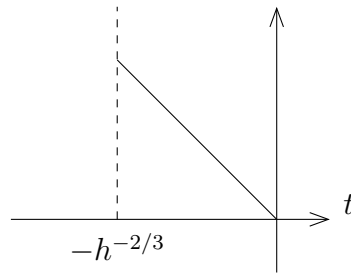


FIGURE 1.15 – Le potentiel translaté puis dilaté sur l’intervalle  $I_h$ .

### 1.5.1 Développement asymptotique des valeurs propres

On démontre un développement asymptotique pour les valeurs propres des opérateurs  $\mathfrak{w}_h^D$  et  $\mathfrak{w}_h^N$  lorsque  $h$  tend vers 0. On rappelle que la suite  $(z_k^a)_{k \geq 1}$  est constituée des racines de la fonction d’Airy inversée  $A$  (voir la définition 1.5). Le résultat suivant décrit le comportement des valeurs propres  $\lambda_k^N(h)$  et  $\lambda_k^D(h)$  quand  $h$  tend vers 0 :

**Théorème 1.16.** *Définissons la phase*

$$\phi_{h,k} := -\frac{4}{3} (h^{-2/3} - z_k^a)^{3/2}.$$

On a lorsque le paramètre  $h$  tend vers 0 les asymptotiques suivantes :

$$\lambda_k^N(h) = z_k^a - \rho_k e^{\phi_{h,k}} \left( 1 + \frac{7}{24} h + O(h^{4/3}) \right) \quad (1.63)$$

et

$$\lambda_k^D(h) = z_k^a + \rho_k e^{\phi_{h,k}} \left( 1 - \frac{5}{24} h + O(h^{4/3}) \right) \quad (1.64)$$

avec  $\rho_k = \left( 2\pi \int_{-\infty}^{z_k^a} |A(t)|^2 dt \right)^{-1}$ .

*Preuve :* Nous commençons par prouver l'asymptotique pour les valeurs propres du problème de Dirichlet  $\lambda_k^D(h)$ . Nous allons démontrer que  $\lambda_k^D(h)$  tend vers  $z_k^a$  quand le paramètre semi-classique  $h$  tend vers 0. Nous utiliserons ensuite le fait que l'équation aux valeurs propres sur  $I_h$  a une base de solutions exactes données par des translatées des fonctions d'Airy inversées  $A$  et  $B$ . Nous formerons une combinaison linéaire de ces deux fonctions pour vérifier les conditions au bord. Les asymptotiques de  $A$  et  $B$  au voisinage de  $-\infty$  permettront ensuite de trouver des développements des coefficients, et les conditions aux bords donneront une équation implicite sur les valeurs propres. On utilisera finalement un argument de perturbation pour trouver le développement des valeurs propres.

ETAPE 1. On montre que  $\lambda_k^D(h) = z_k^a + O(h^\infty)$ . Nous commençons par prouver que

$$\lambda_k^D(h) \leq z_k^a + O(h^\infty) . \quad (1.65)$$

Nous rappelons que  $A$  et  $B$  sont les fonctions d'Airy de première et deuxième espèce inversées (voir la figure 1.3). Nous utiliserons des développements asymptotiques de  $A$  et  $B$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$  (voir [AS64]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} |t|^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}|t|^{3/2}} \left( 1 - \frac{5}{48} |t|^{-3/2} + O(t^{-2}) \right) . \end{array} \right. \quad (1.66a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A'(t) = \frac{1}{2} \pi^{-1/2} |t|^{1/4} e^{-\frac{2}{3}|t|^{3/2}} \left( 1 + \frac{7}{48} |t|^{-3/2} + O(t^{-2}) \right) . \end{array} \right. \quad (1.66b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B(t) = \pi^{-1/2} |t|^{-1/4} e^{\frac{2}{3}|t|^{3/2}} \left( 1 + \frac{5}{48} |t|^{-3/2} + O(t^{-2}) \right) . \end{array} \right. \quad (1.66c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B'(t) = -\pi^{-1/2} |t|^{1/4} e^{\frac{2}{3}|t|^{3/2}} \left( 1 - \frac{7}{48} |t|^{-3/2} + O(t^{-2}) \right) . \end{array} \right. \quad (1.66d)$$

Soit  $\chi_h$  une fonction de troncature régulière valant 1 sur  $[-\frac{h^{-2/3}}{2}, 0]$  et dont le support est inclus dans  $[-\frac{3h^{-2/3}}{4}, 0]$ . Soit  $f_{h,k}(t) = \chi_h(t)A(t + z_k^a)$ . On commence par remarquer que la fonction  $A(t + z_k^a)$  vérifie l'équation aux valeurs propres

$$-y''(t) - ty(t) = z_k^a y(t), \quad t < 0 .$$

De plus, puisque  $A(z_k^a) = 0$ , on a clairement  $f_{h,k} \in \text{Dom}(\mathfrak{w}_h^D)$ . Comme la fonction  $A(t + z_k^a)$  est à décroissance exponentielle en  $-\infty$ , on a l'estimation :

$$\|\mathfrak{w}_h^D f_{h,k} - z_k^a f_{h,k}\|_{L^2(I_h)} = O(h^\infty) .$$

Ainsi le théorème spectral permet de montrer la majoration (1.65). Nous allons maintenant utiliser encore une fois le fait que les vecteurs propres peuvent s'écrire à partir des fonctions d'Airy translatées. Nous notons  $u_{h,k}^D$  un vecteur propre normalisé associé à  $\lambda_k^D(h)$ . La fonction  $u_{h,k}^D$  est un vecteur propre de  $\mathfrak{w}_h^D$  si et seulement si l'équation différentielle suivante est vérifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_{h,k}^{D''}(t) - (t + \lambda_k^D(h))u_{h,k}^D(t) = 0, \quad t \in I_h \end{array} \right. \quad (1.67a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{h,k}^D(-h^{2/3}) = u_{h,k}^D(0) = 0 \end{array} \right. \quad (1.67b)$$

Puisqu’une base des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l’équation différentielle (1.67a) est donnée par les fonctions  $A(t + \lambda_k^D(h))$  et  $B(t + \lambda_k^D(h))$ , on a

$$u_{h,k}^D(t) = \alpha A(t + \lambda_k^D(h)) + \beta B(t + \lambda_k^D(h)), \quad t \in I_h,$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux constantes dépendant de  $h$  et de  $k$ . La condition de Dirichlet en  $x = -h^{-2/3}$  impose alors

$$\beta = -\alpha \frac{A(-h^{-2/3} + \lambda_k^D(h))}{B(-h^{-2/3} + \lambda_k^D(h))}. \quad (1.68)$$

On utilise cette relation :

$$u_{h,k}^D(t) = \alpha \left( A(t + \lambda_k^D(h)) - \frac{A(-h^{-2/3} + \lambda_k^D(h))}{B(-h^{-2/3} + \lambda_k^D(h))} B(t + \lambda_k^D(h)) \right).$$

D’après (1.65) on a que  $\lambda_k^D(h)$  est bornée quand  $h$  tend vers 0, on a donc grâce à (1.66a) et (1.66c) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(-h^{-2/3} + \lambda_k^D(h))}{B(-h^{-2/3} + \lambda_k^D(h))} = 0.$$

La condition de Dirichlet en  $t = 0$  impose donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} A(\lambda_k^D(h)) = 0. \quad (1.69)$$

Puisque  $\lambda_k^D(h)$  est bornée quand  $h$  tend vers 0, on a que  $(\lambda_k^D(h))_h$  a au moins une valeur d’adhérence, qui est un des  $z_n^a$  par passage à la limite dans (1.69). Supposons que deux valeurs propres  $\lambda_{k_1}^D(h)$  et  $\lambda_{k_2}^D(h)$ , avec  $k_1 \neq k_2$  convergent vers la même limite (à extraction près). Nous notons  $z_n^a$  cette limite commune. Alors on a que  $u_{h,k_1}^D$  et  $u_{h,k_2}^D$  convergent toutes les deux faiblement vers une solution du problème sur  $(-\infty, 0]$  :

$$-y(t)'' - ty(t) = z_n^a y(t). \quad (1.70)$$

De plus, puisque les vecteurs propres  $u_{h,k_1}^D$  et  $u_{h,k_2}^D$  sont normalisés, leurs limites faibles (notées  $y_1$  et  $y_2$ ) sont dans  $L^2((-\infty, 0))$ . Or l’espace des solutions de (1.70) qui sont dans  $L^2((-\infty, 0))$  est de dimension 1. Donc il existe  $c \neq 0$  tel que  $y_2 = cy_1$ . Or comme  $k_2 \neq k_1$ , on a  $\langle u_{h,k_1}^D, u_{h,k_2}^D \rangle_{L^2(I_h)} = 0$ . En passant à la limite quand  $h$  tend vers 0, on en déduit que  $y_1 = y_2 = 0$ . Utilisons maintenant un argument de compacité. Soit  $\epsilon > 0$ . On a que

$$\int_{I_h} |(u_{h,k_1}^D)'(t)|^2 + |t| |u_{h,k_1}^D(t)|^2 dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} z_n^a.$$

On a donc

$$\exists C > 0, \forall 0 < R < h^{-2/3}, \quad \int_{-h^{-2/3}}^{-R} |u_{h,k_1}^D|^2 dt < \frac{C}{R}.$$

On choisit donc  $h_0 > 0$  tel que  $Ch_0^{2/3} < \epsilon$ . On fixe  $R = h_0^{-2/3}$ . On a

$$\forall h \in (0, h_0), \quad \int_{-h^{-2/3}}^{-R} |u_{h,k_1}^D|^2 dt < \epsilon.$$



Or puisque  $u_{h,k_1}^D$  converge faiblement vers 0 quand  $h$  tend vers 0, on a

$$\int_{-R}^0 |u_{h,k_1}^D|^2 dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Ceci contredit  $\|u_{h,k_1}^D\|_{L^2(I_h)} = 1$ . D'où  $k_1 = k_2$ . On avait déjà montré que chaque  $\lambda_k^D(h)$  convergeait vers un  $z_n^a$  (avec  $n \leq k$  d'après la majoration (1.65)). De plus deux valeurs propres associées à des  $k_i$  différents ne peuvent converger vers le même zéro d'Airy  $z_n^a$ . On en déduit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_k^D(h) = z_k^a. \quad (1.71)$$

Le théorème spectral permet aussi de dire que  $\lambda_k^D(h) = z_k^a + O(h^\infty)$ .

ETAPE 2. On développe le coefficient  $\beta$  à partir de (1.68). On utilise (1.66a) et (1.66c) : on introduit la phase

$$\phi_{h,k} = -\frac{4}{3} (h^{-2/3} - z_k^a)^{3/2}$$

de sorte que l'on a le développement

$$\frac{A(-h^{-2/3} + \lambda_k^D(h))}{B(-h^{-2/3} + \lambda_k^D(h))} = \frac{1}{2} e^{\phi_{h,k}} \left( 1 - \frac{5}{24} (h^{-2/3} - z_k^a)^{-3/2} + O((h^{-2/3} - z_k^a)^{-2}) \right). \quad (1.72)$$

On fait alors les développements limités

$$(h^{-2/3} - z_k^a)^{-3/2} = h + O(h^{5/3})$$

et

$$(h^{-2/3} - z_k^a)^{-2} = O(h^{4/3}).$$

On trouve en combinant (1.68) et (1.72) :

$$\beta = -\frac{\alpha}{2} e^{\phi_{h,k}} \left( 1 - \frac{5}{24} h + O(h^{4/3}) \right)$$

On introduit  $R_{h,k} = -\frac{2\beta}{\alpha}$  et on a

$$R_{h,k} = e^{\phi_{h,k}} \left( 1 - \frac{5}{24} h + O(h^{4/3}) \right). \quad (1.73)$$

On a donc

$$u_{h,k}^D(t) = \alpha \left( A(t + \lambda_k^D(h)) - \frac{R_{h,k}}{2} B(t + \lambda_k^D(h)) \right).$$

On utilise maintenant la condition de Dirichlet en  $t = 0$  pour obtenir une relation implicite sur  $\lambda_k^D(h)$  :

$$A(\lambda_k^D(h)) - \frac{R_{h,k}}{2} B(\lambda_k^D(h)) = 0. \quad (1.74)$$

ETAPE 3. On utilise un argument de perturbation : on pose  $\delta_{h,k} = \lambda_k^D(h) - z_k^a$ . On sait que  $\delta_{h,k} = O(h^\infty)$  de sorte que

$$A(\lambda_k^D(h)) = \delta_{h,k} A'(z_k^a) + O(\delta_{h,k}^2)$$

et

$$B(\lambda_k^D(h)) = B(z_k^a) + \delta_{h,k} B'(z_k^a) + O(\delta_{h,k}^2).$$

On trouve en injectant cela dans (1.74) que

$$\delta_{h,k} \left( A'(z_k^a) - \frac{R_{h,k}}{2} B'(z_k^a) \right) = \frac{R_{h,k}}{2} B(z_k^a) + O(\delta_{h,k}^2)$$

puis

$$\delta_{h,k} = \frac{B(z_k^a)}{2A'(z_k^a)} R_{h,k} + O(R_{h,k}^2) + O(\delta_{h,k}^2).$$

A partir du comportement de  $R_{h,k}$  donné en (1.73), on trouve que

$$\lambda_k^D(h) = z_k^a + \frac{B(z_k^a)}{2A'(z_k^a)} e^{\phi_{h,k}} \left( 1 - \frac{5}{24} h + O(h^{4/3}) \right).$$

On montre exactement de la même manière un développement du problème de Neumann. La condition de Neumann en  $t = -h^{2/3}$  donne cette fois-ci

$$\beta = -\alpha \frac{A'(-h^{2/3} + \lambda_k^D(h))}{B'(-h^{2/3} + \lambda_k^D(h))}$$

soit en utilisant les asymptotiques (1.66b) et (1.66d) :

$$\beta = \frac{\alpha}{2} e^{\phi_{h,k}} \left( 1 + \frac{7}{24} h + O(h^{4/3}) \right).$$

On conclut de la même manière et on trouve :

$$\lambda_k^N(h) = z_k^a - \frac{B(z_k^a)}{2A'(z_k^a)} e^{\phi_{h,k}} \left( 1 + \frac{7}{24} h + O(h^{4/3}) \right).$$

Afin de pouvoir comparer les valeurs des constantes  $\rho_k = \frac{B(z_k^a)}{2A'(z_k^a)}$ , on utilise la valeur du Wronskien associé aux fonctions d’Airy :  $A'(z_k^a)B(z_k^a) = A'(0)B(0) - A(0)B'(0) = 2\pi$ . On a donc

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi A'(z_k^a)^2} = \left( 2\pi \int_{-\infty}^{z_k^a} |A(t)|^2 dt \right)^{-1}, \quad (1.75)$$

la dernière égalité provenant de l’équation d’Airy. On constate que  $\rho_k > 0$ .  $\square$

**Remarque 1.17.** La phase  $\phi_{h,k}$  admet un développement asymptotique :

$$\phi_{h,k} = -\frac{4}{3} h^{-1} + 2z_k^a h^{-1/3} - \frac{(z_k^a)^2}{2} h^{1/3} - \frac{(z_k^a)^3}{12} h + O(h^{5/3})$$

de sorte que l'on a les développements

$$\lambda_k^N(h) = z_k^a - \rho_k e^{-\frac{4}{3}h^{-1} + 2z_k^a h^{-1/3}} \left( 1 - \frac{(z_k^a)^2}{2} h^{1/3} + \frac{(z_k^a)^4}{8} h^{2/3} - \left( \frac{(z_k^a)^6}{48} + \frac{(z_k^a)^3}{12} - \frac{7}{24} \right) h + O(h^{4/3}) \right) \quad (1.76)$$

et

$$\lambda_k^D(h) = z_k^a + \rho_k e^{-\frac{4}{3}h^{-1} + 2z_k^a h^{-1/3}} \left( 1 - \frac{(z_k^a)^2}{2} h^{1/3} + \frac{(z_k^a)^4}{8} h^{2/3} - \left( \frac{(z_k^a)^6}{48} + \frac{(z_k^a)^3}{12} + \frac{5}{24} \right) h + O(h^{4/3}) \right). \quad (1.77)$$

Nous pouvons maintenant estimer l'effet tunnel du problème associé à l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel en “pic” :

**Corollaire 1.18.** *On définit le splitting des valeurs propres  $E_k^a(h) = \lambda_{2k}(h) - \lambda_{2k-1}(h)$ . Alors les valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{w}_h$  se regroupent en paires exponentiellement proches, de plus on a l'asymptotique :*

$$E_k^a(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 2\rho_k h^{2/3} e^{-\frac{4}{3}h^{-1} + 2z_k^a h^{-1/3}}. \quad (1.78)$$

Commentons cette asymptotique : pour un effet tunnel avec un double puits quadratique, l'asymptotique attendue pour le splitting des valeurs propres a un terme dominant en  $h^\alpha e^{-S_0 h^{-1}}$ , où  $\alpha$  est une constante et  $S_0$  est la distance d'Agmon entre les deux fonds de puits (voir (1.52)). Ici on retrouve la valeur  $S_0 = \frac{4}{3}$  qui est la distance d'Agmon entre les deux minima du potentiel  $V(s) = 1 - |s|$  sur  $[-1, 1]$  :

$$S_0 := \int_{-1}^1 \sqrt{1 - |s|} \, ds = \frac{4}{3}.$$

Pourtant l'asymptotique est différente à cause du terme  $2z_k^a h^{-1/3}$  dans l'exponentielle. Ce terme tend vers  $+\infty$  lorsque  $h$  tend vers 0 avec une vitesse qui dépend de  $k$  et ralentit la convergence vers 0 de l'écart entre les valeurs propres.

Encore une fois on peut calculer la moyenne des paires de valeurs propres et la comparer à un problème modèle :

**Corollaire 1.19.**

$$m_k^a - z_k^a := \frac{\lambda_{2k-1}(h) + \lambda_{2k}(h)}{2} - z_k^a \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\rho_k}{2} h^{5/3} e^{-\frac{4}{3}h^{-1} + 2z_k^a h^{-1/3}}. \quad (1.79)$$

On constate à nouveau que la moyenne de la  $k$ -ième paire de valeurs propres est très proche de la valeur propre d'un problème modèle : le  $k$ -ième zéro de la fonction d'Airy. Puisque  $\rho_k > 0$  d'après (1.75), cette moyenne est inférieure à  $z_k^a$ . Nous pouvons comparer les ordres de grandeur de l'effet tunnel et de cet effet de “moyenne centrée”. Soit

$$p_k^a(h) = \frac{m_k^a - z_k^a}{E_k^a(h)}.$$

Alors on a

$$p_k^a(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{h}{4}. \quad (1.80)$$

Il est remarquable que le premier terme du développement asymptotique de  $p_k^a(h)$  soit le même que celui calculé en (1.57) et qu'il ne dépende pas de  $k$ .

## 1.5.2 Simulations numériques pour le double puits

Nous étudions l'opérateur  $-h^2\partial_x^2 + 1 - x$  sur  $[0, 1]$  avec conditions de Dirichlet en 1 et respectivement Dirichlet et Neumann en 0. Nous notons respectivement  $\check{a}_k^N(h)$  et  $\check{a}_k^D(h)$  la  $k$ -ième valeur propre obtenue numériquement pour ce problème. Nous avons pris 100 éléments finis de taille 0.01 et de degrés  $\mathbb{P}_{10}$ . Nous notons

$$\check{E}_k^a(h) := \check{a}_k^D(h) - \check{a}_k^N(h)$$

l'effet tunnel constaté numériquement. Le pas  $h$  est choisi suffisamment petit pour être dans un régime asymptotique, mais puisque les asymptotiques ont un terme dominant exponentiellement décroissant, on ne distingue plus les valeurs propres si  $h$  est trop petit. Ainsi si  $h < 0.02$ , on a  $\check{E}_k^a(h) = 0$  avec une précision de 12 chiffres. On fait donc varier  $h$  avec un pas de 0.005 de  $h = 0.02$  à  $h = 0.2$ , puis avec un pas plus large (0.02) pour les valeurs supérieures à  $h = 0.2$  (car nous ne sommes déjà plus dans le régime asymptotique). Nous prenons pour  $z_1^a$  et  $A'(z_1^a)$  des valeurs numériques approchées fournies par [AS64]. Nous avons

$$z_1^a \simeq 2.338107410459767 \quad \text{et} \quad \rho_1 = 0.647372020741386 .$$

Nous avons représenté la première paire de valeurs propres sur la figure 1.16. On voit qu'elle converge bien vers  $z_1^a$ . On rappelle que d'après (1.78) on s'attend à voir pour  $h$  petit :

$$\check{E}_1^a(h) \simeq 2\rho_1 e^{-\frac{4}{3}(h^{-2/3} - z_1^a)^{3/2}} .$$

Puisque  $\rho_1$  est positif d'après (1.75), on peut définir  $\kappa := \log(2\rho_1)$ . On a l'asymptotique théorique quand  $h$  tend vers 0 :

$$\log(E_1^a(h)) \sim \kappa - \frac{4}{3}(h^{-2/3} - z_1^a)^{3/2} + o(h^{-2/3} - z_1^a)^{3/2} . \quad (1.81)$$

On peut développer cette asymptotique :

$$\log(E_1^a(h)) = \kappa - \frac{4}{3}h^{-1} + 2z_1^a h^{-1/3} + o(h^{-1/3}) .$$

On compare cela avec les valeurs  $\log(\check{E}_1^a(h))$  calculées numériquement sur la figure 1.17. On retrouve le comportement prévu et on constate que le terme  $2z_1^a h^{-1/3}$  qui tend vers  $+\infty$  modifie bien l'asymptotique des valeurs propres. Afin de bien détecter le comportement de la phase, nous calculons la quantité  $\log|\log(\check{E}_1^a(h))|$  en fonction de  $\log h$ . Rappelons que grâce à (1.81), nous avons le développement théorique

$$\log|\log(E_1^a(h))| = \log\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\log(h^{-2/3} - z_1^a) + o(1) .$$

On peut faire un développement de ces quantités quand  $h$  tend vers 0 :

$$\log|\log(E_1^a(h))| = \log\frac{4}{3} - \log h - \frac{3}{2}z_1^a h^{2/3} + o(h^{3/2}) .$$

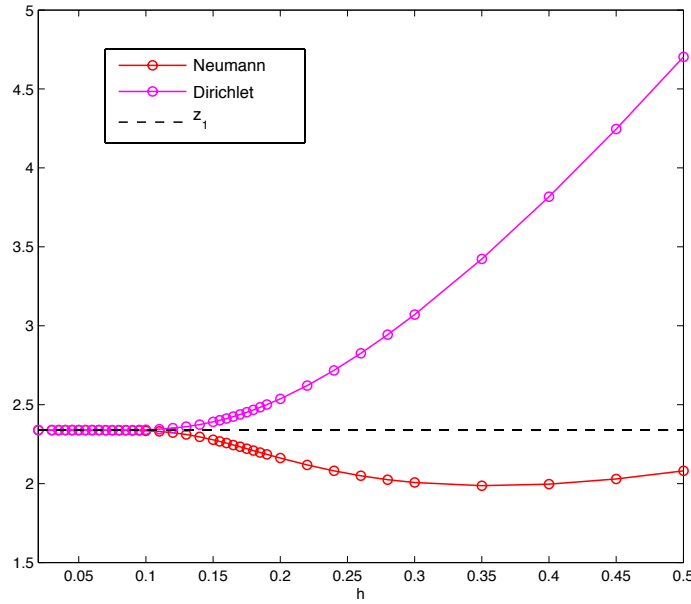


FIGURE 1.16 – Les premières valeurs propres  $\check{a}_1^N(h)$  et  $\check{a}_1^D(h)$  selon  $h$ .

On s'attend donc à ce que  $\log |\log (\check{E}_1^a(h))|$  ait asymptotiquement un comportement affine en  $\log h$ . On observe sur la figure 1.18 ce comportement : quand  $h$  tend vers 0 le logarithme de la phase est proche de  $\log(4/3) - \log h$ . Comme pour la figure 1.17, on voit clairement que l'asymptotique à 3 termes est plus proche des valeurs calculées numériquement. La comparaison est encore meilleure si on trace la quantité  $\log \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \log (h^{-2/3} - z_1^a)$  sans en faireNotations]faire un développement asymptotique.

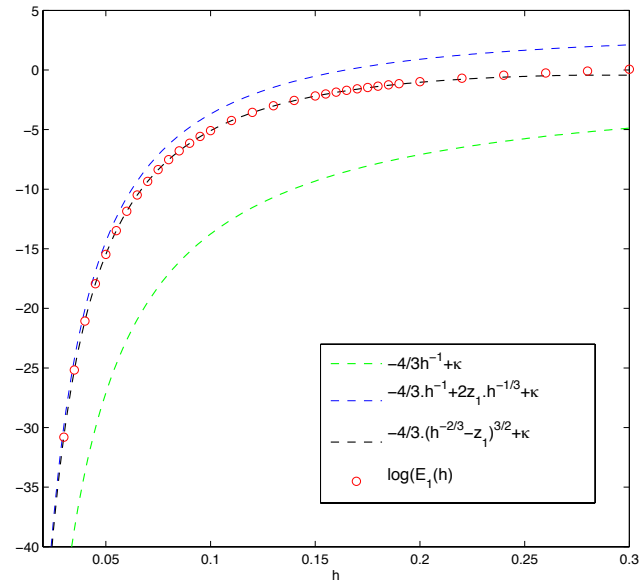


FIGURE 1.17 –  $\log(\check{E}_1^a(h))$  selon  $h$  et les asymptotiques théoriques de la phase.

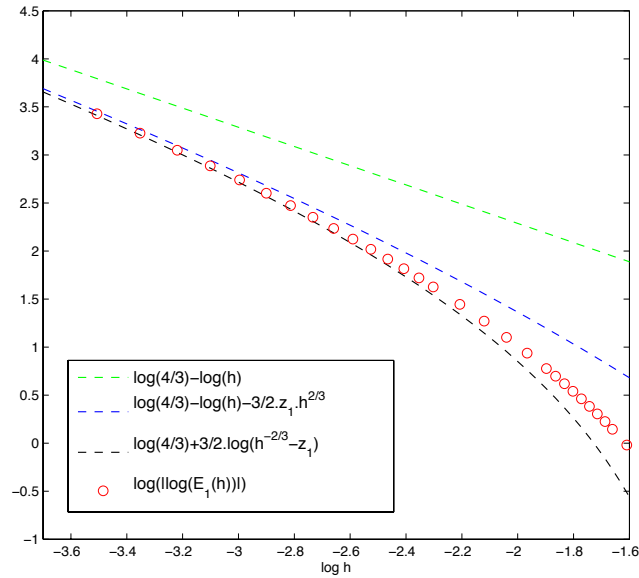


FIGURE 1.18 –  $\log|\log(\check{E}_1^a(h))|$  selon  $\log h$  et les asymptotiques théoriques du logarithme de la phase.



## Chapitre 2

# Etude d'un opérateur de Schrödinger avec potentiel dégénéré sur le demi-plan

Nous avons rappelé dans la section [B.6](#) le rôle de l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  (avec  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ ) dans l'étude du comportement semi-classique de l'opérateur de Schrödinger magnétique dans des ouverts réguliers de  $\mathbb{R}^3$ . Cet opérateur a déjà été étudié dans la littérature (voir par exemple [\[LP00b\]](#), [\[HM02\]](#), [\[MT05\]](#) ou plus récemment [\[Ray09b\]](#)) : il s'agit d'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel électrique positif sur un domaine non borné. Deux faits rendent son étude originale : d'une part nous avons une condition de Neumann sur le bord du domaine d'intégration, et d'autre part l'ensemble des points où le potentiel électrique s'annule est une demi-droite : les minima du potentiel sont dégénérés.

L'essentiel de ce chapitre est issu de [\[BNDPR12\]](#). Dans la section [2.1](#) nous commençons par rappeler des faits connus sur l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$ , en particulier qu'il existe une valeur propre pour  $\mathcal{L}_\theta$  sous le spectre essentiel dès que  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Nous proposons des estimations pour les premières valeurs propres dont une majoration basée sur une construction "naïve" de quasi-modes. Dans la section [2.2](#), nous démontrons que les vecteurs propres associés à des valeurs propres situées sous le spectre essentiel décroissent exponentiellement vite quand on s'éloigne de l'origine. Nous améliorons ainsi le résultat de [\[Ray09b\]](#). Un deuxième résultat de décroissance, dit "anisotrope" vient compléter le comportement des vecteurs propres : ceux-ci sont concentrés dans la vallée d'annulation du potentiel. Des calculs numériques viennent illustrer ces résultats. On s'intéresse ensuite au comportement du spectre quand  $\theta \rightarrow 0$ . On montre dans la section [2.3](#) que le nombre de valeurs propres sous le spectre essentiel tend vers l'infini et on en donne une minoration. Nous montrons aussi que les valeurs propres se densifient dans l'intervalle  $(\Theta_0, 1)$ . Dans la section [2.4](#), nous construisons des quasi-mode en puissances de  $\theta$  pour  $\mathcal{L}_\theta$  quand  $\theta$  tend vers 0. Pour cela on réalise des changements de variables bien choisis qui permettent de se ramener à un problème semi-classique. Nous développons l'opérateur en puissances du paramètre et nous cherchons une paire propre sous la forme de séries formelles. Le théorème spectral valide cette approche et fournit une majoration pour la  $n$ -ième valeur propre. La dernière section est consacrée à la preuve de l'asymptotique des valeurs propres. On réalise une approximation de Born-Oppenheimer en introduisant un opérateur unidimensionnel modèle dont le spectre est connu. Un procédé de Grushin permet de comparer l'asymptotique cherchée avec le spectre de l'opérateur modèle : on montre ainsi que le



développement obtenu par construction de quasi-modes correspond à l'asymptotique des valeurs propres quand  $\theta$  tend vers 0.

Nous notons  $x = (s, t)$  les coordonnées cartésiennes et nous rappelons que  $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, t > 0\}$  est le demi-plan supérieur et  $\mathbf{n} = (0, 1)$  la normale rentrante. Le potentiel électrique  $V_\theta$  est défini par

$$V_\theta : x = (s, t) \mapsto (t \cos \theta - s \sin \theta)^2 .$$

L'opérateur de Schrödinger (avec condition de Neumann) associé  $\mathcal{L}_\theta$  est défini par

$$\mathcal{L}_\theta = -\partial_t^2 - \partial_s^2 + V_\theta , \quad (s, t) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (2.1)$$

sur le domaine

$$\text{Dom}(\mathcal{L}_\theta) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+^2), V_\theta u \in L^2(\mathbb{R}_+^2), \mathbf{n} \cdot \nabla u|_{t=0} = 0\} .$$

Le potentiel électrique  $V_\theta$  est positif sur  $\mathbb{R}_+^2$  et s'annule sur la droite  $t \cos \theta = s \sin \theta$  (voir la figure 2.1). Cette droite fait un angle de  $\theta$  avec le bord du demi-plan. La forme

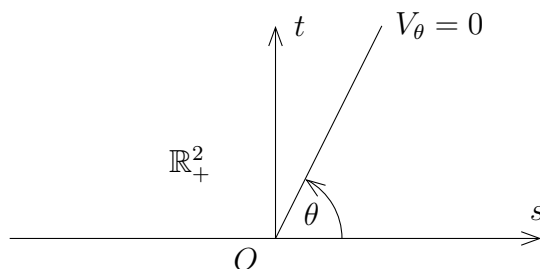


FIGURE 2.1 – Le demi-plan  $\mathbb{R}_+^2$  et la droite d'annulation du potentiel électrique.

quadratique associée à l'opérateur est

$$q_\theta(u) = \int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla u|^2 + V_\theta |u|^2 \, dx \quad (2.2)$$

définie sur le domaine de forme

$$\text{Dom}(q_\theta) = \{u \in H^1(\mathbb{R}_+^2), |t \cos \theta - s \sin \theta| u \in L^2(\mathbb{R}_+^2)\} .$$

Nous définissons également  $a_\theta$  la forme bilinéaire symétrique associée à  $q_\theta$  :

$$a_\theta(u, v) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \nabla u \cdot \nabla v + V_\theta uv \, dx .$$

Nous notons  $\sigma_k(\theta)$  le  $k$ -ième quotient de Rayleigh de  $\mathcal{L}_\theta$  défini par le principe du min-max. En particulier  $\sigma_1(\theta)$  est le bas du spectre de  $\mathcal{L}_\theta$ .

## 2.1 Premières estimations sur le bas du spectre

Rappelons que l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  a été introduit pour étudier le spectre de  $P_{\mathbf{A}_\theta, \mathbb{R}_+^3}$  dans le cas  $\theta \neq 0$  (voir la section B.6). Nous pouvons néanmoins calculer le bas du spectre de l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  pour  $\theta = 0$  : on a

$$\mathcal{L}_0 = -\partial_t^2 - \partial_s^2 + t^2, \quad (s, t) \in \mathbb{R}_+^2$$

et une transformation de Fourier par rapport à la variable  $s$  permet d'affirmer que

$$\mathcal{L}_0 = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} -\partial_t^2 + t^2 + \xi_1^2 d\xi_1.$$

La condition de Neumann en  $\{t = 0\}$  permet de se ramener aux fonctions paires par rapport à la variable  $t$  (voir le corollaire 1.2). Comme le spectre de  $-\partial_t^2 + t^2 + \xi_1^2$  sur  $t \in \mathbb{R}$  vaut  $[1 + \xi_1^2, +\infty)$ , on en déduit

$$\mathfrak{S}(\mathcal{L}_0) = \mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_0) = [1, +\infty) \quad (2.3)$$

et donc

$$\sigma_1(0) = 1.$$

**Remarque 2.1.** Il faut comparer ce résultat avec (B.26) : le spectre de notre opérateur modèle  $\mathcal{L}_\theta$  pour  $\theta = 0$  ne correspond pas au spectre de l'opérateur de Schrödinger sur le demi-espace avec champ magnétique tangent au bord (lequel vaut  $[\Theta_0, +\infty)$ ). Rappelons que l'opérateur  $\mathcal{H}_{\theta, \tau}$  est défini comme la réalisation de Neumann de

$$-\partial_s^2 - \partial_t^2 + (\tau + s \sin \theta - t \cos \theta)^2, \quad (s, t) \in \mathbb{R}_+^2$$

et que

$$\sigma(\theta) = \inf_{\tau} \inf \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\theta, \tau}).$$

Il est prouvé que dans les cas  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , le spectre de l'opérateur  $\mathcal{H}_{\theta, \tau}$  ne dépend pas de  $\tau$ . Rappelons aussi la définition de  $\sigma_1(\theta)$  pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  :

$$\sigma_1(\theta) = \inf \mathfrak{S}(\mathcal{L}_\theta). \quad (2.4)$$

Puisque  $\mathcal{H}_{\theta, 0} = \mathcal{L}_\theta$ , on a

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}], \quad \sigma(\theta) = \sigma_1(\theta).$$

Par contre, dans le cas  $\theta = 0$ , le spectre de l'opérateur  $\mathcal{H}_{\theta, \tau}$  dépend de  $\tau$ , et la plus petite valeur propre pour  $\tau = 0$  ne correspond pas à l'infimum des spectres de la famille d'opérateurs  $\mathcal{H}_{0, \tau}$ . Ainsi nous avons  $\inf(\mathfrak{S}(\mathcal{L}_0)) = 1$ , mais cette valeur ne correspond pas à  $\sigma(0) = \Theta_0$  :

$$\sigma(0) \neq \sigma_1(0).$$

Le spectre de l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  dans l'autre cas limite ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) est aussi explicite : il est démontré dans [HM02] que l'on a

$$\mathfrak{S}(\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}}) = \mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}}) = [1, +\infty)$$

et ainsi

$$\sigma_1(\theta) = 1 .$$

Nous rappelons maintenant des résultats sur la nature du spectre quand  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Le lemme de Persson (voir (B.12)) permet de trouver le spectre essentiel de l'opérateur dans le cas  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  :

**Proposition 2.2.** *On a*

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \mathfrak{S}_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = [1, +\infty) . \quad (2.5)$$

La démonstration pourra être trouvée dans [HM02]. La preuve utilise (B.16) et (1.6).

Une fois que le spectre essentiel est déterminé, il est naturel de chercher des valeurs propres discrètes situées sous le spectre essentiel :

**Proposition 2.3.** *On a existence d'une valeur propre sous le spectre essentiel dès que la droite d'annulation du potentiel n'est ni tangente ni perpendiculaire au bord du demi-plan :*

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \sigma_1(\theta) < 1 . \quad (2.6)$$

La démonstration consiste à construire un quasi-mode dont l'énergie est strictement plus petite que 1 et d'utiliser le principe du min-max (voir [LP00a] par exemple). On peut noter que ce quasi-mode a une énergie très proche de 1.

**Remarque 2.4.** Nous proposons maintenant une analogie entre l'existence de spectre discret pour l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  dès que  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  et l'étude des guides d'ondes quantiques, en effet on sait que le laplacien de Dirichlet dans un guide d'ondes “courbé” possède du spectre discret sous son spectre essentiel : la démonstration est analogue à celle de (2.6) (voir [DE95] et [CDFK05]).

Pour faire l'analogie, nous utilisons à nouveau un argument de symétrie : puisque l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  est défini par une condition de Neumann sur le bord  $\{t = 0\}$ , le problème sur le demi-plan est équivalent au problème sur le plan avec un potentiel “symétrisé” qui atteint son minimum le long de la réunion de deux demi-droites. Si on admet que le potentiel confine bien les vecteurs propres le long de cette ligne brisée, on voit l'analogie avec un guide d'ondes à coin (qui est un cas dégénéré des guides d'ondes courbés). L'existence de spectre discret pour un tel guide d'ondes est connue (voir [EŠŠ89]) et cette analogie a motivé une étude plus poussée du spectre du laplacien de Dirichlet dans des guides d'ondes à coin ([DR11]).

### 2.1.1 Monotonie et régularité

Nous rappelons des propriétés connues sur les fonctions  $\sigma_k(\theta)$  :

**Proposition 2.5.** *Les fonctions  $\theta \mapsto \sigma_k(\theta)$  sont continues et croissantes sur  $(0, \frac{\pi}{2})$ .*

*Preuve :* Nous réalisons la rotation

$$\begin{cases} u_1 = t \cos \theta - s \sin \theta \\ u_2 = t \sin \theta + s \sin \theta \end{cases}$$

puis le changement d'échelle

$$\begin{cases} y_1 = -u_1 \\ y_2 = u_2 \tan \theta \end{cases}$$

qui montrent que l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  est isospectral à la réalisation de Neumann de

$$-\partial_{y_1}^2 - (\tan \theta)^2 \partial_{y_2}^2 + y_1^2$$

sur un domaine qui ne dépend pas de  $\theta$ . On déduit de la théorie des perturbations que les fonctions  $\sigma_k$  sont continues, et le principe du min-max montre que ces fonctions sont aussi croissantes.  $\square$

On a (voir [LP00b, lemme 3.6]) que la première valeur propre est simple, et que la fonction propre associée est de signe constant et ne s'annule pas. On peut en déduire d'après [Kat95, chapitre 7] que  $\theta \rightarrow \sigma_1(\theta)$  est analytique sur  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Dans [HM02, Lemme 3.9] les auteurs démontrent la stricte croissance sur  $(0, \frac{\pi}{2})$  de la première valeur propre : il faut utiliser la formule de Feynman-Hellmann en un possible minimum local pour trouver une contradiction. Nous améliorons ce résultat en montrant la stricte croissance des valeurs propres lorsqu'elles sont sous le spectre essentiel :

**Proposition 2.6.** *Soit  $N \geq 1$  un entier, nous supposons qu'il existe  $\theta_* \in (0, \frac{\pi}{2})$  tels que les assertions (a) et (b) sont vérifiées :*

(a)  $\sigma_N(\theta_*) < 1$  ;

(b) *Les valeurs propres  $(\sigma_n(\theta_*))_{1 \leq n \leq N}$  sont toutes simples.*

*On peut donc définir*

$$\theta^{\max} := \sup\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}], \sigma_N(\theta) < 1\}.$$

*Alors pour tout  $1 \leq n \leq N$ , les fonctions  $\theta \mapsto \sigma_n(\theta)$  sont strictement croissantes sur  $(0, \theta^{\max})$ .*

*Preuve :* Supposons donc que les assertions (a) et (b) sont vérifiées. D'après la théorie des perturbations de Kato, les graphes des fonctions  $(\sigma_n(\theta))_{1 \leq n \leq N}$  pour  $\theta \in (0, \theta^{\max})$  correspondent aux graphes de  $N$  courbes analytiques distinctes, et donc se coupent en un ensemble de points discret. Les valeurs propres sont donc de multiplicité 1 (et sont donc dérivables) sauf sur un ensemble discret de points. Soit  $n$  un entier vérifiant  $1 \leq n \leq N$  et soit  $I \subset (0, \theta^{\max})$  un intervalle tel que les valeurs propres  $\sigma_n(\theta)$  sont simples pour  $\theta \in I$ . Pour montrer que la fonction  $\theta \mapsto \sigma_n(\theta)$  est strictement croissante sur  $I$ , nous reprenons la démonstration de [HM02, lemme 3.9] : on réalise le changement d'échelle

$$\begin{cases} v_1 = t \cos \theta \\ v_2 = s \sin \theta \end{cases}$$

qui montre que  $\mathcal{L}_\theta$  est unitairement équivalent à la réalisation de Neumann de

$$\widehat{\mathcal{L}}_\theta := -(\cos \theta)^2 \partial_{v_1}^2 - (\sin \theta)^2 \partial_{v_2}^2 + (v_1 - v_2)^2, \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Puisque les valeurs propres  $\sigma_n(\theta)$  sont simples pour  $\theta \in I$ , la fonction  $\sigma_n$  est dérivable sur  $I$ . La formule de Feynman-Hellmann nous permet de calculer cette dérivée : si on note  $\widehat{u}_{\theta,n}$  un vecteur propre normalisé de  $\widehat{\mathcal{L}}_\theta$  associé à la valeur propre  $\sigma_n(\theta)$ , on a

$$\sigma'_n(\theta) = -\sin \theta \cos \theta \left( \|\partial_{v_1} \widehat{u}_{\theta,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 - \|\partial_{v_2} \widehat{u}_{\theta,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \right).$$

Supposons que  $\sigma_n$  ne soit pas strictement croissante sur  $I$ , on a alors qu'il existe  $\theta_0 \in I$  tel que  $\sigma'_n(\theta_0) = 0$ . La formule de Feynman-Hellmann nous donne

$$\|\partial_{v_1} \widehat{u}_{\theta_0,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 = \|\partial_{v_2} \widehat{u}_{\theta_0,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2$$

et on a alors

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}_\theta \widehat{u}_{\theta_0,n}, \widehat{u}_{\theta_0,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = \|\partial_{v_2} \widehat{u}_{\theta_0,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|(v_2 - v_1) \widehat{u}_{\theta_0,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2.$$

Puisque  $v_2 \in \mathbb{R}$ , le membre de droite est clairement plus grand que la plus petite valeur propre de l'oscillateur harmonique réel  $\mathfrak{h}$ . On a donc prouvé

$$\langle \widehat{\mathcal{L}}_\theta \widehat{u}_{\theta_0,n}, \widehat{u}_{\theta_0,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \geq 1.$$

Puisque  $\langle \widehat{\mathcal{L}}_\theta \widehat{u}_{\theta_0,n}, \widehat{u}_{\theta_0,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = \sigma_n(\theta_0)$ , on a une contradiction avec le fait que  $\sigma_n(\theta_0)$  est une valeur propre sous le spectre essentiel. On déduit que la fonction  $\sigma_n(\theta)$  est strictement croissante sur  $I$ . Puisque cette fonction est dérivable sur  $(0, \theta^{\max})$  sauf sur un ensemble discret de points et qu'elle est croissante, on déduit qu'elle est strictement croissante sur  $(0, \theta^{\max})$ .  $\square$

**Remarque 2.7.** Nous démontrerons dans la section 2.5 que les assertions (a) et (b) peuvent toujours être vérifiées : pour  $N \geq 1$  fixé, il suffit d'après le théorème 2.37 de prendre  $\theta_*$  suffisamment petit.

## 2.1.2 Encadrement des valeurs propres et illustrations numériques

Nous donnons maintenant une majoration pour les premières valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  pour  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Pour cela nous construisons des quasi-modes à partir des opérateurs modèles  $\mathfrak{h}_{\xi_0}^N$  et  $\mathfrak{h}$ . Nous rappelons que  $u_{\xi_0}^N$  est la fonction propre associée à la première valeur propre  $\Theta_0$  de  $\mathfrak{h}_{\xi_0}^N$  et que  $\psi_n$  est la  $n$ -ième fonction d'Hermite. Nous définissons pour  $n \geq 1$  le quasi-mode normalisé  $\widetilde{u}_{n,\theta}$  par

$$\widetilde{u}_{n,\theta}(s, t) := (\cos \theta \sin \theta)^{\frac{1}{4}} u_{\xi_0}^N(t \sqrt{\cos \theta}) \psi_n \left( s \sqrt{\sin \theta} - \frac{\xi_0}{\tan \theta} \right). \quad (2.7)$$

**Lemme 2.8.** *L'énergie de ce quasi-mode se calcule :*

$$\forall n \geq 1, \forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad q_\theta(\tilde{u}_{n,\theta}) = \Theta_0 \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta. \quad (2.8)$$

*Preuve :* Commençons par remarquer que la fonction  $\tilde{u}_{n,\theta}$  est bien dans le domaine de forme  $\text{Dom}(q_\theta)$  si  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . On réalise le changement de variables suivant dans la forme quadratique  $q_\theta$  :

$$\begin{cases} y = s\sqrt{\sin \theta} - \frac{\xi_0}{\sqrt{\tan \theta}} \\ z = t\sqrt{\cos \theta}. \end{cases} \quad (2.9)$$

On trouve

$$\begin{aligned} q_\theta(\tilde{u}_{n,\theta}) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \cos \theta |(u_{\xi_0}^N)'(z)\psi_n(y)|^2 + \sin \theta |u_{\xi_0}^N(z)\psi_n'(y)|^2 \right. \\ &\quad \left. + (y\sqrt{\cos \theta} - y\sqrt{\sin \theta} - \xi_0\sqrt{\cos \theta})^2 |u_{\xi_0}^N(z)\psi_n(y)|^2 \right) dy dz \\ &= \cos \theta \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( |(u_{\xi_0}^N)'(z)\psi_n(y)|^2 + (z - \xi_0)^2 |u_{\xi_0}^N(z)\psi_n(y)|^2 \right) dy dz \\ &\quad + \sin \theta \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( |u_{\xi_0}^N(z)\psi_n'(y)|^2 + y^2 |u_{\xi_0}^N(z)\psi_n(y)|^2 \right) dy dz \\ &\quad - 2\sqrt{\sin \theta}\sqrt{\cos \theta} \int_{\mathbb{R}_+^2} y(z - \xi_0) |u_{\xi_0}^N(z)\psi_n(y)|^2 dy dz. \end{aligned}$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\psi_n'(y)|^2 + y^2 |\psi_n(y)|^2 dy &= 2n - 1, \\ \int_{\mathbb{R}_+} |(u_{\xi_0}^N)'(z)|^2 + (z - \xi_0)^2 |u_{\xi_0}^N(z)|^2 dz &= \Theta_0, \\ \int_{\mathbb{R}_+} (z - \xi_0) |u_{\xi_0}^N(z)|^2 dz &= 0. \end{aligned}$$

En effet les deux premières sont des conséquences de l'équation aux valeurs propres pour  $\psi_n$  et  $u_{\xi_0}^N$  tandis que la troisième provient de (1.16). On a donc

$$q_\theta(\tilde{u}_{n,\theta}) = \Theta_0 \cos \theta \|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + (2n - 1) \sin \theta \|u_{\xi_0}^N\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

Puisque  $u_{\xi_0}^N$  et  $\psi_n$  sont normalisées, on a (2.8). □

Afin d'appliquer le principe du min-max, on montre le résultat suivant :

**Lemme 2.9.** *Les fonctions  $(\tilde{u}_{n,\theta})_{n \geq 1}$  sont orthogonales pour la forme bilinéaire symétrique  $a_\theta$ .*

*Preuve :* Soient  $n \neq m$  deux entiers distincts, on applique de nouveau le changement de variables (2.9) :

$$\begin{aligned} a_\theta(\tilde{u}_{n,\theta}, \tilde{u}_{m,\theta}) &= \Theta_0 \cos \theta \int_{\mathbb{R}} \psi_n(y) \psi_m(y) \, dy \\ &\quad + \sin \theta \int_{\mathbb{R}} \psi'_n(y) \psi'_m(y) + y^2 \psi_n(y) \psi_m(y) \, dy \\ &\quad - 2\sqrt{\sin \theta} \sqrt{\cos \theta} \int_{\mathbb{R}_+^2} y(z - \xi_0) \psi_n(y) \psi_m(y) |u_{\xi_0}^N(z)|^2 \, dy \, dz . \end{aligned}$$

Le premier terme est nul puisque les fonctions d'Hermite sont orthogonales deux à deux. Pour le second terme, nous reconnaissons la forme bilinéaire associée à l'oscillateur harmonique  $\mathfrak{h}$ , on fait donc une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi'_n(y) \psi'_m(y) \, dy &= \int_{\mathbb{R}} -\psi''_n(y) \psi_m(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (2n + 1 - y^2) \psi_n(y) \psi_m(y) \, dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}} y^2 \psi_n(y) \psi_m(y) \, dy . \end{aligned}$$

Pour le troisième terme, on utilise encore (1.16). On en déduit

$$a_\theta(\tilde{u}_{n,\theta}, \tilde{u}_{m,\theta}) = 0 .$$

□

On applique le principe du min-max aux fonctions  $\tilde{u}_{n,\theta}$  et on déduit des lemmes 2.8 et 2.9 la majoration suivante :

**Proposition 2.10.**

$$\forall n \geq 1, \forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \sigma_n(\theta) \leq \Theta_0 \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta . \quad (2.10)$$

Une technique classique pour minorer le bas du spectre d'un opérateur est de découper celui-ci en deux parties que l'on minore indépendamment par des opérateurs modèles. La preuve suivante est issue de [HM02, section 1.4] mais l'estimation n'y est pas optimale, nous présentons la démonstration puisque la technique sera à nouveau utilisée plus tard. Nous améliorons l'estimation comme proposé en [HM02, remarque 3.6].

**Proposition 2.11.** *On a la minoration suivante :*

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \sigma_1(\theta) \geq \sqrt{\Theta_0^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} . \quad (2.11)$$

*Preuve :* Nous écrivons

$$\mathcal{L}_\theta = (-\partial_t^2 + \rho^2 V_\theta) + (-\partial_s^2 + (1 - \rho^2) V_\theta) , \quad (2.12)$$

avec  $\rho \in [0, 1]$  un paramètre. On introduit

$$L_{\theta, \rho}^1 = -\partial_t^2 + \rho^2 V_\theta$$

sur  $\mathbb{R}_+^2$  avec condition de Neumann au bord. On réalise le changement d'échelle  $T = \sqrt{\rho \cos \theta} t$  pour voir que  $L_{\theta, \rho}^1$  est unitairement équivalent à la réalisation de Neumann sur  $\mathbb{R}_+^2$  de

$$\rho \cos \theta \left( -\partial_T^2 + \left( T - \frac{\rho \sin \theta}{\sqrt{\rho \cos \theta}} s \right)^2 \right).$$

Ainsi en se souvenant que pour tout réel  $\tau$  on a  $\mu_1^N(\tau) \geq \Theta_0$  on trouve que

$$\inf \mathfrak{S}(L_{\theta, \rho}^1) \geq \rho \Theta_0 \cos \theta.$$

On introduit de même

$$L_{\theta, \rho}^2 = -\partial_s^2 + (1 - \rho^2) V_\theta$$

et des changements d'échelle permettent de comparer son spectre avec celui de l'oscillateur harmonique  $\mathfrak{h}$ . On trouve

$$\inf \mathfrak{S}(L_{\theta, \rho}^2) \geq \sqrt{1 - \rho^2} \sin \theta.$$

On a donc montré en utilisant (2.12) :

$$\forall \rho \in [0, 1], \quad \sigma_1(\theta) \geq \rho \Theta_0 \cos \theta + \sqrt{1 - \rho^2} \sin \theta. \quad (2.13)$$

Afin d'optimiser cette minoration on prend

$$\rho = \frac{\Theta_0 \cos \theta}{\sqrt{\Theta_0^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}$$

et on trouve (2.11). □

Nous résumons les estimations trouvées pour la première valeur propre dans l'encadrement suivant (voir la figure 2.10) :

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \sqrt{\Theta_0^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \leq \sigma_1(\theta) \leq \min(\Theta_0 \cos \theta + \sin \theta, 1). \quad (2.14)$$

On en déduit le comportement en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  pour la première valeur propre :

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sigma_1(\theta) = 1. \quad (2.15)$$

Ainsi la fonction  $\sigma_1$  est continue dans un voisinage de  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . On a aussi montré que

$$\forall n \geq 1, \forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \Theta_0 \leq \sigma_n(\theta) \leq \Theta_0 \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta.$$

On en déduit la limite quand  $\theta$  tend vers 0 de la  $n$ -ième valeur propre :

$$\forall n \geq 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \sigma_n(\theta) = \Theta_0. \quad (2.16)$$



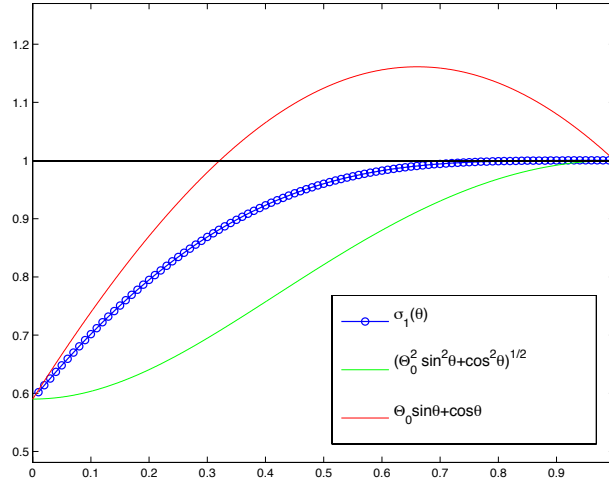


FIGURE 2.2 – Illustration de la fonction  $\sigma_1(\theta)$  en fonction de  $\vartheta := \frac{2\theta}{\pi}$  et les encadrants de l'estimation (2.14) pour  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Ainsi la fonction  $\sigma_1(\theta)$  se prolonge en une fonction continue sur  $(0, \frac{\pi}{2}]$  mais n'est pas continue en  $\theta = 0$  puisque  $\sigma_1(0) = 1$ . Par symétrie, la fonction  $\sigma_1(\theta)$  est donc continue sur  $(0, \pi)$  (voir la figure 2.4).

Les résultats numériques suivants sont issus de [BNDPR12]. Nous calculons numériquement les premières paires propres de  $\mathcal{L}_\theta$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . Nous utilisons la librairie d'éléments finis MELINA sur un domaine borné qui approche  $\mathbb{R}_+^2$ . Nous définissons

$$R_{a,b,c} = (-a, b) \times (0, c)$$

le rectangle qui servira pour approcher le demi-plan. Nous définissons  $\mathcal{L}_{\theta,R}$  comme étant l'opérateur  $-\Delta + V_\theta$  avec condition de Neumann sur le bord  $\{t = 0\}$  et conditions de Dirichlet sur la frontière artificielle  $\{s = -a\} \cup \{s = b\} \cup \{t = c\}$ . Nous notons  $\sigma_n(\theta, a, b, c)$  sa  $n$ -ième valeur propre. Puisque le domaine de  $\mathcal{L}_{\theta,R}$  s'injecte dans celui de  $\mathcal{L}_\theta$ , on a :

$$\sigma_n(\theta) \leq \sigma_n(\theta, a, b, c) . \quad (2.17)$$

Pour la même raison,  $\sigma_n(\theta, a, b, c)$  est également décroissante par rapport aux paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$ . En utilisant le théorème 2.15 qui sera démontré dans la partie suivante, on peut voir que quand  $a$ ,  $b$  et  $c$  tendent vers l'infini, on a que  $\sigma_n(\theta, a, b, c)$  converge vers  $\sigma_n(\theta)$ , et les vecteurs propres de  $\mathcal{L}_{\theta,R}$  tendent en norme  $H^1$  vers ceux de  $\mathcal{L}_\theta$ .

Nous rappelons que la méthode de calcul est conforme : les valeurs propres calculées numériquement sont toujours supérieures aux valeurs propres théoriques. Pour les valeurs propres représentées sur les figures 2.16 et 2.3, le domaine de calcul est fixé : il s'agit de  $R = (-100, 100) \times (0, 100)$ . Il est composé de 15 éléments de degré  $\mathbb{Q}_{10}$  dans chaque direction. Nous représentons sur la figure 2.2 la première valeur propre de  $\mathcal{L}_\theta$  et les fonctions

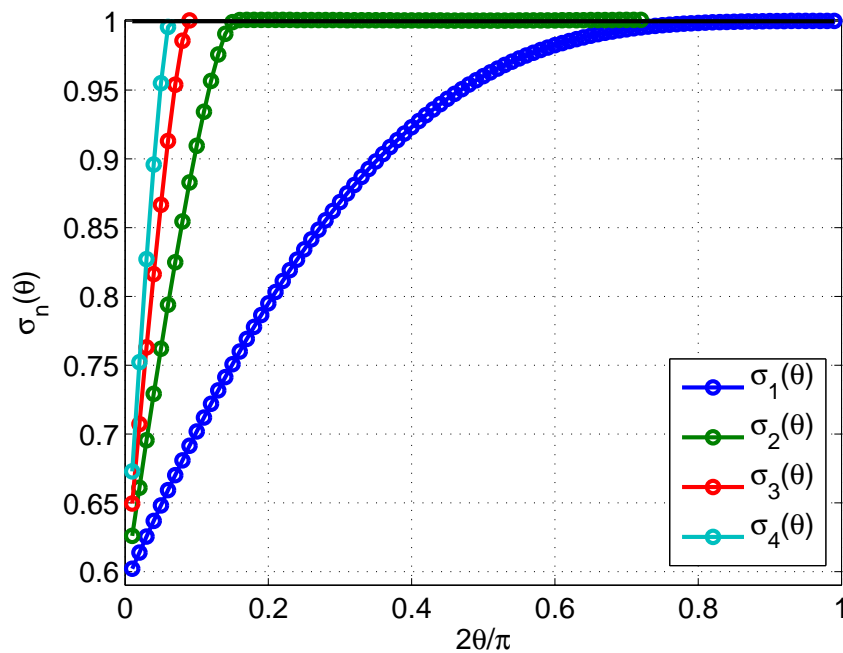


FIGURE 2.3 – Illustration des fonctions  $\sigma_n(\theta)$  en fonction de  $\vartheta := \frac{2\theta}{\pi}$  pour  $n = 1, \dots, 4$ . Leur limite quand  $\theta$  tend vers 0 est bien  $\Theta_0$ .

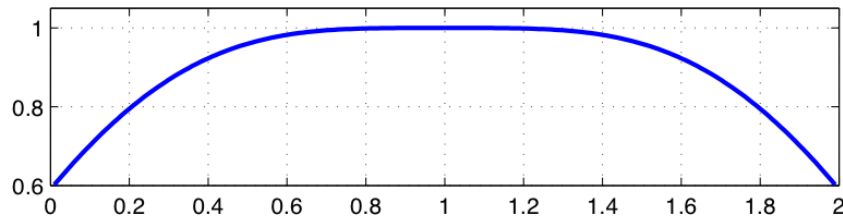


FIGURE 2.4 – La fonction  $\sigma_1(\theta)$  en fonction de  $\vartheta := \frac{2\theta}{\pi}$  prolongée par symétrie. Ces calculs illustrent le corollaire 2.13 : la fonction  $\sigma_1(\theta)$  est de classe  $C^1$  sur  $(0, \pi)$  et sa dérivée est nulle en  $\frac{\pi}{2}$ .

intervenant dans l'encadrement (2.10) en fonction de  $\vartheta := 2\theta/\pi$ . Sur la figure 2.3 on voit les 4 premières valeurs propres sous le spectre essentiel. Ces simulations illustrent clairement le résultat (2.16). Le spectre de  $\mathcal{L}_\theta$  est calculé pour  $\vartheta = k/100$  avec  $k = 1, \dots, 100$ . Sur la figure 2.4, nous avons symétrisé les calculs de  $\sigma_1(\theta)$  par rapport à l'axe  $\{\vartheta = 1\}$  afin de représenter la fonction  $\sigma_1$  sur  $(0, \pi)$ .

### 2.1.3 Un résultat sur la dérivée

On remarque sur la figure 2.2 que la dérivée de  $\sigma_1$  semble tendre vers 0 près de  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . On se propose ici d'étudier ce phénomène.

**Proposition 2.12.** *On a l'estimation suivante sur la dérivée :*

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad 0 \leq \sigma'_1(\theta) \leq \sigma_1(\theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (2.18)$$

*Preuve :* Nous suivons une idée de formule du Viriel que l'on peut trouver dans [Ray10] : pour  $\gamma \geq 0$  nous introduisons l'opérateur

$$\mathcal{L}_{\theta,\gamma} := -\partial_t^2 - \partial_s^2 + (t(\cos \theta + \gamma) - s \sin \theta)^2 \quad (2.19)$$

sur  $\mathbb{R}_+^2$  avec condition de Neumann au bord. Nous notons  $\sigma_1(\theta, \gamma)$  le bas du spectre de  $\mathcal{L}_{\theta,\gamma}$ . Nous définissons  $\rho > 0$  et  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  comme le couple vérifiant

$$\cos \theta + \gamma = \rho \cos \alpha \text{ et } \sin \theta = \rho \sin \alpha.$$

En réalisant le changement d'échelle  $(\check{t}, \check{s}) = \rho^{-1/2}(s, t)$ , on voit que  $\mathcal{L}_{\theta,\gamma}$  est unitairement équivalent à  $\rho \mathcal{L}_\alpha$ , on a donc  $\sigma_1(\theta, \gamma) = \rho \sigma_1(\alpha)$ , soit en explicitant  $\rho$  et  $\alpha$  :

$$\sigma_1(\theta, \gamma) = \sqrt{(\cos \theta + \gamma)^2 + \sin^2 \theta} \sigma_1 \left( \arctan \left( \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \gamma} \right) \right). \quad (2.20)$$

En particulier on a

$$\partial_\gamma \sigma_1(\theta, 0) = \sigma_1(\theta) \cos \theta - \sigma_1'(\theta) \sin \theta. \quad (2.21)$$

On exprime maintenant  $\partial_\gamma \sigma_1(\theta, \gamma)$  à l'aide d'une formule de Feynman-Hellmann pour trouver son signe. En réalisant le changement de variable  $\tilde{t} = (\cos \theta + \gamma)t$ , on a que  $\mathcal{L}_{\theta,\gamma}$  est unitairement équivalent à

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\theta,\gamma} := -(\cos \theta + \gamma)^2 \partial_{\tilde{t}}^2 - \partial_s^2 + (\tilde{t} - s \sin \theta)^2.$$

Puisque sa plus petite valeur propre est simple (car c'est aussi la plus petite valeur propre de  $\rho \mathcal{L}_\alpha$ ), la formule de Feynman-Hellmann s'applique :

$$\partial_\gamma \sigma_1(\theta, \gamma) = 2(\cos \theta + \gamma) \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial_{\tilde{t}} \tilde{u}_{\theta,\gamma}|^2 ds d\tilde{t}$$

avec  $\tilde{u}_{\theta,\gamma}$  le premier vecteur propre de  $\tilde{\mathcal{L}}_{\theta,\gamma}$ . Si on avait  $\partial_\gamma \sigma_1(\theta, \gamma) = 0$ , alors on aurait  $\partial_{\tilde{t}} \tilde{u}_{\theta,\gamma} = 0$  presque partout, ce qui contredirait  $\tilde{u}_{\theta,\gamma} \in L^2(\mathbb{R}_+^2)$ . Donc on a

$$\forall \gamma \geq 0, \quad \partial_\gamma \sigma_1(\theta, \gamma) > 0.$$

En combinant ceci avec (2.21), on trouve

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \sigma_1(\theta) \cos \theta - \sigma_1'(\theta) \sin \theta > 0.$$

Puisque  $\sigma_1$  est strictement croissante sur  $(0, \frac{\pi}{2})$ , on déduit du lemme l'encadrement

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad 0 \leq \sigma_1'(\theta) \leq \sigma_1(\theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

□

**Corollaire 2.13.** *La fonction  $\theta \rightarrow \sigma_1(\theta)$  se prolonge en une fonction de classe  $C^1$  sur  $(0, \frac{\pi}{2}]$ . De plus la fonction ainsi prolongée vérifie*

$$\sigma_1' \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Rappelons que la fonction  $\theta \rightarrow \sigma_1(\theta)$  définie sur  $(0, \pi)$  n'était *a priori* pas dérivable en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  puisque le bas du spectre de  $\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}}$  correspond à du spectre essentiel. Or cette fonction est symétrique par rapport à  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et le corollaire précédent montre donc qu'elle se prolonge à l'intervalle  $(0, \pi)$  en une fonction de classe  $C^1$  dont la dérivée est nulle en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (voir la figure 2.4).

## 2.2 Localisation des vecteurs propres : estimations d'Agmon

Nous allons utiliser les formules de la section B.4 pour montrer des estimations de concentrations des fonctions propres. Dans un premier temps nous montrons une estimation isotrope de décroissance exponentielle basée sur la connaissance du spectre essentiel de l'opérateur. On démontre ensuite que les fonctions propres vérifient une propriété très générale des opérateurs de Schrödinger : elles sont concentrées dans la “vallée” du potentiel  $\{t \cos \theta - s \sin \theta = 0\}$ . Nous illustrons les décroissances associées aux deux phénomènes par des simulations numériques.

Nous commençons par un lemme qui permet de relier l'énergie d'une fonction propre sur deux sous-domaines de  $\Omega$ . Ce lemme est une conséquence directe des formules démontrées dans la section B.4

**Lemme 2.14.** *Soit  $(\sigma, u_\sigma)$  une paire propre de  $\mathcal{L}_\theta$  et soit  $\Phi$  une fonction bornée uniformément Lipschitzienne définie sur  $\mathbb{R}_+^2$ . Nous avons l'identité suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla(e^\Phi u_\sigma)|^2 + \int_{\mathbb{R}_+^2} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\sigma|^2 = 0. \quad (2.22)$$

Soit  $(\Omega^+, \Omega^-)$  une partition de  $\mathbb{R}_+^2$ , alors on a

$$\int_{\Omega^+} (V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\sigma|^2 \leq \sup_{\Omega^-} |V_\theta - \sigma(\theta) - |\nabla\Phi|^2| \int_{\Omega^-} e^{2\Phi} |u_\sigma|^2. \quad (2.23)$$

### 2.2.1 Estimations isotropes

Nous avons un résultat de décroissance exponentielle isotrope des vecteurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  à l'infini. L'ingrédient essentiel est la connaissance du spectre essentiel qui va permettre de contrôler ce qu'il se passe à l'infini. Dans la suite nous notons génériquement  $x = (s, t)$  un point de  $\mathbb{R}_+^2$  et  $|x| = \sqrt{s^2 + t^2}$ .

**Théorème 2.15.** *Soit  $(\sigma, u_\sigma)$  une paire propre de  $\mathcal{L}_\theta$  avec  $\sigma < 1$ . On a*

$$\forall \alpha \in (0, \sqrt{1 - \sigma}), \exists C_{\alpha, \theta} > 0, \quad q_\theta(e^{\alpha|x|} u_\sigma) \leq C_{\alpha, \theta} \|u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \quad (2.24)$$

*Preuve :* PRÉLIMINAIRES. Soit  $(\chi_1, \chi_2)$  une partition de l'unité de  $\mathbb{R}^+$  vérifiant  $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 1$  et :

$$\begin{cases} 0 \leq \chi_1 \leq 1, & \chi_1(r) = 1 \text{ si } r \leq 1 \text{ et } \chi_1(r) = 0 \text{ si } r \geq 2, \\ 0 \leq \chi_2 \leq 1, & \chi_2(r) = 0 \text{ si } r \leq 1 \text{ et } \chi_2(r) = 1 \text{ si } r \geq 2. \end{cases}$$

On définit

$$\chi_1^R(x) = \chi_1\left(\frac{|x|}{R}\right) \quad \text{et} \quad \chi_2^R(x) = \chi_2\left(\frac{|x|}{R}\right). \quad (2.25)$$

On a  $\nabla \chi_j^R(x) = \frac{1}{R} \nabla \chi_j(\frac{x}{R})$ . On en déduit

$$\exists C > 0, \forall j = 1, 2, \forall x \in \mathbb{R}_+^2, \quad |\nabla \chi_j^R(x)| \leq \frac{C}{R}. \quad (2.26)$$

Fixons  $\alpha > 0$ . Nous prenons comme distance d'Agmon :

$$\Phi(s, t) = \alpha \sqrt{t^2 + s^2} = \alpha |x|. \quad (2.27)$$

Elle vérifie  $|\nabla \Phi|^2 = \alpha^2$ . On ne sait pas encore que  $e^{\Phi} u_\sigma \in \text{Dom}(q_\theta)$ . Nous allons donc tronquer  $\Phi$  afin de pouvoir appliquer les identités du lemme 2.14. Nous définissons pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} \Phi_k(x) = \alpha |x| & \text{si } |x| \leq k, \\ \Phi_k(x) = \alpha(2k - |x|) & \text{si } k \leq |x| \leq 2k, \\ \Phi_k(x) = 0 & \text{si } |x| \geq 2k. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} |\nabla \Phi_k|^2 = |\nabla \Phi|^2 = \alpha^2 & \text{si } |x| \leq 2k, \\ |\nabla \Phi_k|^2 = 0 & \text{si } |x| > 2k. \end{cases}$$

PREMIÈRE ÉTAPE. En combinant (B.7) et (B.8) on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (\sigma + |\nabla \Phi_k|^2) e^{2\Phi_k} |u_\sigma|^2 = \sum_{j=1}^2 q_\theta(\chi_j^R e^{\Phi_k} u_\sigma) - \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla \chi_j^R|^2 e^{2\Phi_k} |u_\sigma|^2 dx. \quad (2.28)$$

Choisissons  $\varepsilon \in (0, 1 - \sigma)$  et

$$\alpha = \sqrt{1 - \varepsilon - \sigma}. \quad (2.29)$$

On a alors

$$\sigma + |\nabla \Phi|^2 = 1 - \varepsilon. \quad (2.30)$$

Introduisons  $\Omega_k = \mathbb{R}_+^2 \cap \{|x| \leq 2k\}$  et  $\Omega'_k = \mathbb{R}_+^2 \cap \{|x| > 2k\}$ . Puisque  $\nabla \Phi_k$  est nul sur  $\Omega'_k$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (\sigma + |\nabla \Phi_k|^2) e^{2\Phi_k} |u_\sigma|^2 dx = (1 - \varepsilon) \|e^{\Phi_k} u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + (\sigma - 1 + \varepsilon) \int_{\Omega'_k} |u_\sigma|^2 dx. \quad (2.31)$$

On choisit  $R > 0$  de sorte que

$$\frac{C^2}{R^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.32)$$

où  $C$  est la constante de (2.26). On a avec ce choix de  $R$  :

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{R}_+^2} |\nabla \chi_j^R|^2 e^{\Phi_k} |u_\sigma|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \|e^{\Phi_k} u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \quad (2.33)$$

Les relations (2.28), (2.31) et (2.33) nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} \|e^{\Phi_k} u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 &\leq \|e^{\Phi_k} u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 - \sum_{j=1}^2 q_\theta(\chi_j^R e^{\Phi_k} u_\sigma) + (\sigma - 1 + \varepsilon) \int_{\Omega'_k} |u_\sigma|^2 dx \\ &\leq \|e^{\Phi_k} u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 - q_\theta(\chi_2^R e^{\Phi_k} u_\sigma). \end{aligned} \quad (2.34)$$

DEUXIÈME ÉTAPE. En vue de contrôler l'énergie loin de l'origine  $q_\theta(\chi_2^R e^{\Phi_k} u_\sigma)$ , nous rappelons une notation introduite dans le lemme de Persson (voir (B.10)) :

$$\Sigma(\mathcal{L}_\theta, r) = \inf \left\{ q_\theta(u), \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = 1, u \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^2} \cap \complement B_r) \right\},$$

où  $B_r$  est la boule de rayon  $r$  centrée en 0, et  $\complement B_r$  son complémentaire. Il résulte du lemme de Persson que la limite de  $\Sigma(\mathcal{L}_\theta, r)$  quand  $r \rightarrow +\infty$  est égale au bas du spectre essentiel de  $\mathcal{L}_\theta$  :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sigma(\mathcal{L}_\theta, r) = 1. \quad (2.35)$$

On a :

$$\frac{q_\theta(\chi_2^R e^{\Phi_k} u_\sigma)}{\|\chi_2^R e^{\Phi_k} u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2} \geq \sigma(\mathcal{L}_\theta, R), \quad (2.36)$$

et donc :

$$q_\theta(\chi_2^R e^{\Phi_k} u_\sigma) \geq \sigma(\mathcal{L}_\theta, R) \int_{\Omega'_R} e^{2\Phi_k} |u_\sigma|^2 dx. \quad (2.37)$$

En utilisant (2.34), on obtient :

$$\frac{\varepsilon}{2} \|e^{\Phi_k} u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \leq \int_{\Omega_R} e^{2\Phi_k} |u_\sigma|^2 dx + (1 - \Sigma(\mathcal{L}_\theta, R)) \int_{\Omega'_R} e^{2\Phi_k} |u_\sigma|^2 dx.$$

Grâce à (2.35), on peut choisir  $R$  suffisamment grand pour avoir en plus de (2.32) :

$$1 - \Sigma(\mathcal{L}_\theta, R) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

On déduit :

$$\frac{\varepsilon}{4} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{2\Phi_k} |u_\sigma|^2 \leq \int_{\Omega_R} e^{2\Phi_k} |u_\sigma|^2 dx.$$

On a finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|e^{\Phi_k} u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon} e^{4\alpha R} \|u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2.$$

CONCLUSION. On a que  $|e^{\Phi_k} u_\sigma|$  converge ponctuellement vers  $|e^\Phi u_\sigma|$  lorsque  $k$  tend vers l'infini. On déduit du lemme de Fatou que  $e^\Phi u_\sigma \in L^2(\Omega)$ . On peut se servir alors de (2.23) et (2.30) pour conclure :

$$\|\nabla(e^\Phi u_\sigma)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|V_\theta e^\Phi u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 = (1 - \varepsilon) \|e^\Phi u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2.$$

□

**Remarque 2.16.** Cette preuve permet de montrer que  $u_\sigma$  est dans la classe de Schwartz (voir [Ray10]).

Si on fixe deux angles  $(\theta_1, \theta_2)$  vérifiant  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ , on constate que  $\alpha$  et  $C_{\alpha, \theta}$  peuvent être choisies uniformément par rapport à  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . Par contre, si  $\theta$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ , on a  $\sigma_1(\theta)$  qui tend vers 1, et la démonstration précédente ne permet pas d'avoir des estimations uniformes. Lorsque  $\theta$  tend vers 0, il est impossible d'avoir des estimées uniformes en  $s$ , cependant si on regarde la décroissance par rapport à la variable  $t$  on va pouvoir avoir des estimations uniformes par rapport à  $\theta$ , il va falloir pour cela supposer que l'on reste "loin" du spectre essentiel.

**Proposition 2.17.** *Soit  $\eta < 1$ . Il existe  $C > 0$  et  $\gamma > 0$  tels que pour toute paire propre  $(\sigma, u_\sigma)$  vérifiant  $\sigma < \eta$ , on a l'estimation suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{2\gamma t} |u_\sigma|^2 dt ds \leq C \|u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \quad (2.38)$$

*Preuve :* On reprend la preuve du théorème 2.15 en remplaçant la fonction  $\Phi$  définie en (2.27) par la fonction

$$\Phi(s, t) = \gamma t.$$

Nous modifions aussi la partition de l'unité définie en (2.25), que nous remplaçons en une partition selon  $t$  :

$$\chi_1^R(s, t) = \chi_1\left(\frac{t}{R}\right) \quad \text{et} \quad \chi_2^R(s, t) = \chi_2\left(\frac{t}{R}\right). \quad (2.39)$$

Nous fixons  $\varepsilon \in (0, 1 - \eta)$ , et nous reprenons la preuve précédente. Remarquons que  $\chi_2^R e^\Phi u_\sigma$  a son support loin du bord  $\{t = 0\}$ , et peut donc être vue comme une fonction de  $H^2(\mathbb{R}^2)$ . Or il est classique (voir [FH10]) que le bas du spectre de l'opérateur  $-\Delta + V_\theta$  sur  $\mathbb{R}^2$  est 1. On peut donc remplacer la minoration (2.36) par

$$q_\theta(\chi_2^R e^\Phi u_\sigma) \geq \|\chi_2^R e^\Phi u_\sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (2.40)$$

On note alors que  $\varepsilon$  et  $R$  sont fixés indépendamment de  $R$  et on conclut comme pour le théorème 2.15.  $\square$

## 2.2.2 Estimations transverses

Dans cette section nous montrons que les vecteurs propres sont concentrés dans la vallée du potentiel :

**Théorème 2.18.** *Soit  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ . Il existe une constante  $K(\beta)$  telle que pour toute paire propre  $(\sigma, u_\sigma)$  de  $\mathcal{L}_\theta$  avec  $\sigma < 1$ , on ait :*

$$q_\theta(e^{\beta V_\theta} u_\sigma) \leq K(\beta) \|u_\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.41)$$

*Preuve :* Dans un premier temps nous introduisons la distance d'Agmon d'un point à la vallée d'annulation du potentiel. Après avoir décrit cette fonction, nous réalisons une partition de  $\mathbb{R}_+^2$  en deux sous-ensembles : les points "loin" de la vallée et les points plus proches. Nous nous servons de l'identité (2.23) pour relier l'énergie d'une fonction

propre sur ces deux sous-ensembles et on utilise ensuite le fait que la distance d'Agmon est contrôlée près de cette vallée. Nous introduisons classiquement la fonction associée à la distance d'Agmon (voir [Agm82]) :

$$\Phi(x) = (1 - \delta) \int_{\sqrt{\sigma}}^{\sqrt{V_\theta(x)}} \sqrt{(l^2 - \sigma)_+} \, dl, \quad (2.42)$$

où  $f_+$  est la partie positive de la fonction  $f$ . Notons que si nous définissons la fonction

$$g(d) = \int_{\sqrt{\sigma}}^d \sqrt{(l^2 - \sigma)_+} \, dl,$$

alors on a :

$$\Phi(x) = (1 - \delta)g\left(\sqrt{V_\theta(x)}\right).$$

On vérifie que l'on a uniformément en  $\theta$  :

$$g(d) \underset{d \rightarrow +\infty}{=} \frac{d^2}{2} + \mathcal{O}(\ln d) \quad \text{et} \quad g'(d) \underset{d \rightarrow +\infty}{=} d + \mathcal{O}(d^{-1}). \quad (2.43)$$

Le théorème est donc vrai si et seulement si  $q_\theta(e^\Phi u_\sigma)$  est bornée uniformément en  $\theta$  pour tout  $\delta \in (0, 1)$ . Nous allons prouver cela. On fixe  $\delta \in (0, 1)$ . Par construction de  $\Phi$ , on a :

$$|\nabla \Phi|^2 = (1 - \delta)^2 (V_\theta - \sigma)_+. \quad (2.44)$$

Soit  $\eta > 0$ , on définit une partition de l'unité :

$$A_\eta^+ = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta(s, t) - \sigma > \eta\} \quad \text{et} \quad A_\eta^- = \{(s, t) \in \Omega, V_\theta(s, t) - \sigma \leq \eta\}.$$

Sur  $A_\eta^+$ , on a :

$$V_\theta - \sigma - |\nabla \Phi|^2 = (V_\theta - \sigma)(2\delta - \delta^2) > \eta(2\delta - \delta^2). \quad (2.45)$$

De même, on a sur  $A_\eta^-$  :

$$|V_\theta - \sigma - |\nabla \Phi|^2| = \begin{cases} \sigma - V_\theta & \text{si } V_\theta < \sigma, \\ (V_\theta - \sigma)(2\delta - \delta^2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On prend  $\eta$  assez petit pour que :

$$0 < \eta(2\delta - \delta^2) \leq \Theta_0 < \sigma.$$

On a alors la majoration suivante

$$\sup_{A_\eta^-} |V_\theta - \sigma - |\nabla \Phi|^2| \leq \sigma. \quad (2.46)$$

On combine (2.23), (2.45) and (2.46) pour avoir

$$\eta(2\delta - \delta^2) \int_{A_\eta^+} e^{2\Phi} |u_\sigma|^2 \leq \int_{A_\eta^+} (V_\theta - \sigma - |\nabla \Phi|^2) e^{2\Phi} |u_\sigma|^2 \leq \sigma \int_{A_\eta^-} e^{2\Phi} |u_\sigma|^2. \quad (2.47)$$



Puisque  $\|u_\sigma\|_{L^2(\Omega)} = 1$  et que  $\Phi$  est maximale sur le bord de  $A_\eta^-$ , on a :

$$\|e^\Phi u_\sigma\|_{L^2(\Omega)} \leq \left( \frac{\sigma}{\eta(2\delta - \delta^2)} + 1 \right)^{1/2} \exp \int_{\sqrt{\sigma}}^{\sqrt{\sigma+\eta}} (1 - \delta) \sqrt{l^2 - \sigma} \, dl. \quad (2.48)$$

On note  $K(\eta, \delta, \sigma)$  le membre de droite de la dernière inégalité. Si on fixe  $\delta > 0$ , la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \times [\Theta_0, 1] &\mapsto \mathbb{R} \\ (\eta, \sigma) &\mapsto K(\eta, \delta, \sigma) \end{aligned}$$

est clairement positive et continue. On note que :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} K(\eta, \delta, \sigma) = +\infty.$$

Rappelons que  $\eta$  est contrôlé par l'hypothèse (2.2.2). On introduit l'intervalle

$$I(\delta) = \left( 0, \frac{\Theta_0}{2\delta - \delta^2} \right].$$

Ceci nous permet de définir la constante

$$K_0(\delta) = \max_{\sigma \in [\Theta_0, 1]} \min_{\eta \in I(\delta)} K(\eta, \delta, \sigma).$$

Le minimum est atteint en un  $\eta_0 \in I(\delta)$ . En prenant  $\eta = \eta_0$ , On déduit de (2.48) :

$$\|e^\Phi u_\sigma\|_{L^2(\Omega)} \leq K_0(\delta). \quad (2.49)$$

Si on définit

$$\tilde{\Phi}(x) = \left( 1 - \frac{\delta}{2} \right) \int_{\sqrt{\sigma}}^{\sqrt{V_\theta(x)}} \sqrt{(l^2 - \sigma)_+} \, dl,$$

on a

$$\|e^{\tilde{\Phi}} u_\sigma\|_{L^2(\Omega)} \leq K_0\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

A cause de (2.43) on a facilement

$$\exists K_1(\delta) > 0, \forall d > 0, |d e^{-\frac{\delta}{2}g(d)}| < K_1(\delta). \quad (2.50)$$

On note que  $\sqrt{V_\theta} e^{\Phi - \tilde{\Phi}} = \sqrt{V_\theta} e^{-\frac{\delta}{2}g(\sqrt{V_\theta})}$  et avec (2.50), on déduit :

$$\exists K_1(\delta) > 0, \quad \|\sqrt{V_\theta} e^{\Phi - \tilde{\Phi}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_1(\delta).$$

On a donc :

$$\|\sqrt{V_\theta} e^\Phi u_\sigma\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\sqrt{V_\theta} e^{\Phi - \tilde{\Phi}}\|_{L^\infty(\Omega)} \|e^{\tilde{\Phi}} u_\sigma\|_{L^2(\Omega)},$$

et finalement on a existence d'une constante  $K_2(\delta)$  telle que :

$$\|\sqrt{V_\theta} e^\Phi u_\sigma\|_{L^2(\Omega)} \leq K_2(\delta).$$

En utilisant la définition de  $\Phi$  on a aussi :

$$\| |\nabla \Phi| e^\Phi u_\sigma \|_{L^2(\Omega)} \leq K_3(\delta).$$

On utilise (B.6) et on peut conclure :

$$q_\theta(e^\Phi u_\sigma) = \| |\nabla \Phi| e^\Phi u_\sigma \|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma \|e^\Phi u_\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K(\delta).$$

□

### 2.2.3 Comparaisons des résultats de localisations et nouveaux calculs numériques

Nous allons comparer les résultats de décroissance des théorèmes 2.15 et 2.18. Soit

$$x = r(\cos \gamma, \sin \gamma)$$

avec  $r > 0$  et  $\gamma \in [0, \pi]$  un point du demi-plan en coordonnées polaires. Pour  $\gamma$  fixé, on décrit ainsi la droite qui fait un angle  $\gamma$  avec le bord  $\{t = 0\}$  du demi-plan. On a alors

$$|x| = r \quad \text{et} \quad V_\theta(x) = r^2 \sin^2(\gamma - \theta) .$$

Ainsi le facteur de décroissance dans l'exponentielle tend plus vite vers 0 dans le théorème 2.18 dès que  $\gamma \neq \theta$ , c'est-à-dire lorsqu'on s'éloigne de la vallée du potentiel. Par contre le long la droite  $V_\theta(x) = 0$ , le théorème 2.18 ne donne plus d'informations et il faut se servir de l'estimation isotrope du théorème 2.15 pour décrire la décroissance des vecteurs propres. Puisque nous savons que les vecteurs propres se concentrent dans la vallée d'annulation du potentiel, nous avons fait des calculs numériques en adaptant la taille du rectangle  $R$  selon la valeur de  $\theta$ . La figures 2.5 montrent les vecteurs propres associés à la première valeur propre de  $\mathcal{L}_{\theta,R}$  dans un rectangle  $R = (-5, 15) \times (0, 75)$ . Les éléments sont de taille 1 et de degré  $\mathbb{Q}_2$ . Les valeurs de  $\theta$  pour lesquelles on a représenté le vecteur propre sont  $\theta = \vartheta\pi/2$  avec  $\vartheta = 0.7, 0.8, 0.85$  et  $0.9$ . Pour des valeurs de  $\theta$  plus petites, on adapte le calcul en prenant comme "boîte"  $R = (-15, 25) \times (0, 15)$ . Les calculs sont faits avec des éléments carrés de taille 1 et de degré  $\mathbb{Q}_6$ . Les valeurs de  $\theta$  représentées sont  $\theta = \vartheta\pi/2$  avec  $\vartheta = 0.6, \dots, 0.1$ .

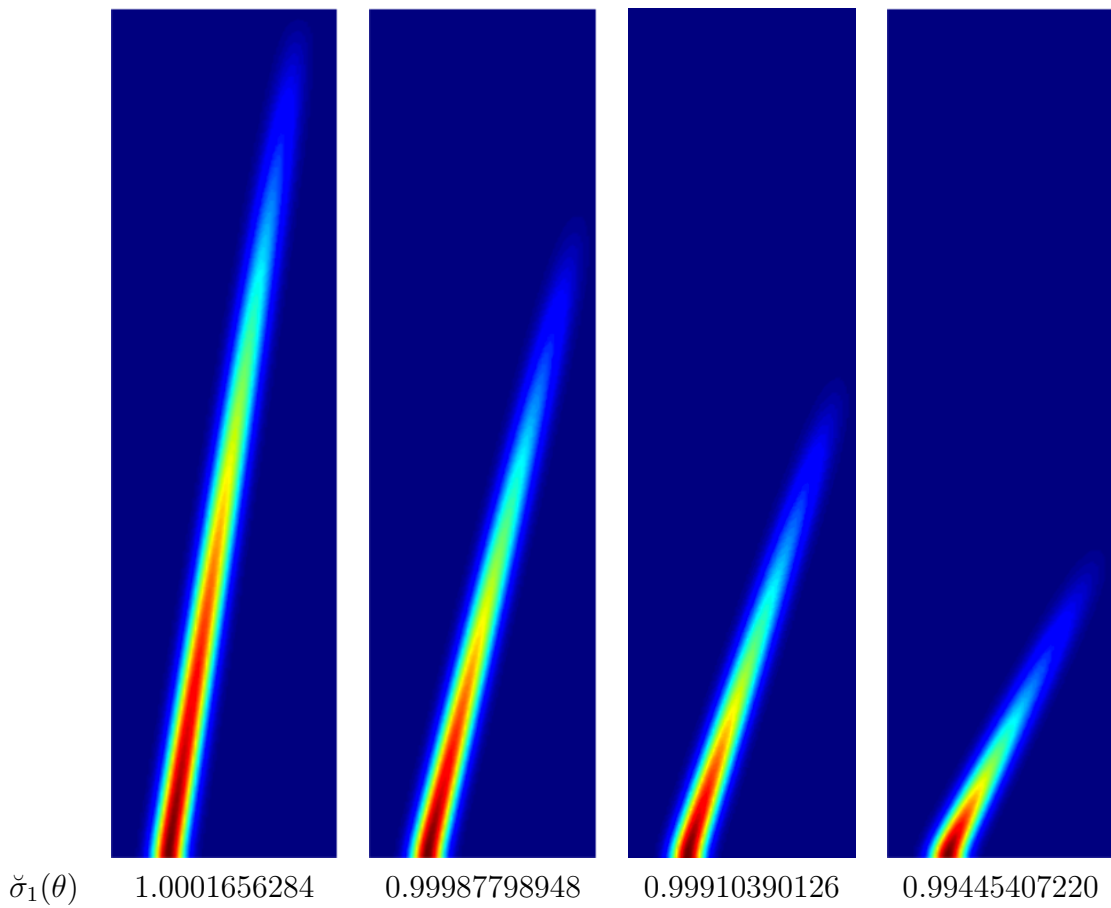


FIGURE 2.5 – Le vecteur propre associé à la première valeur propre de  $\mathcal{L}_{\theta,R}$  pour  $\theta = \vartheta\pi/2$  avec  $\vartheta = 0.9, 0.85, 0.8$  et  $0.7$ . Ici  $R = (-5, 15) \times (0, 75)$ . Ces calculs sont issus de [BNDPR12].

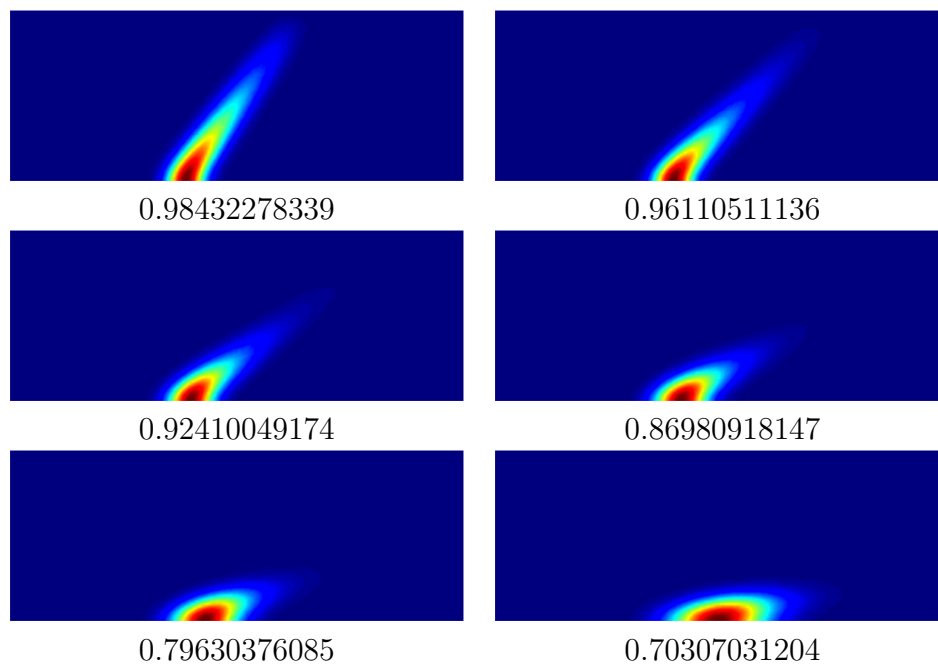


FIGURE 2.6 – Le vecteur propre de  $\mathcal{L}_{\theta,R}$  associé à la première valeur propre pour  $\theta = \vartheta\pi/2$  avec  $\vartheta = 0.6, \dots, 0.1$ . Ici  $R = (-15, 25) \times (0, 15)$ . Ces calculs sont issus de [BNDPR12].

## 2.3 Densification du spectre pour des petits angles

Dans cette section nous nous proposons de montrer que le nombre de valeurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  situées sous le spectre essentiel tend vers  $+\infty$  et qu'elles se densifient dans l'intervalle  $(\Theta_0, 1)$  quand  $\theta$  tend vers 0. Notons  $n(\theta)$  le nombre de valeurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  (comptées avec multiplicité) sous le spectre essentiel. Il a été prouvé dans [MT05, théorème 2.1] que  $n(\theta)$  est fini pour tout  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  et que le nombre de valeurs propres sous le spectre essentiel est majorée :

$$\exists C > 0, \quad \forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad n(\theta) \leq \frac{C}{\sin \theta}.$$

Un des ingrédients clefs de ce résultat est une estimation du nombre de valeurs propres d'un opérateur unidimensionnel issue de [EK87, théorème 1]. Nous montrons une minoration de ce nombre de valeurs propres :

**Proposition 2.19.** *On a une estimation sur le nombre de valeurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  :*

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad n(\theta) \geq \frac{1 - \Theta_0 \cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{1}{2}. \quad (2.51)$$

*Preuve :* Rappelons la majoration (2.10) :

$$\forall n \geq 1, \forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \sigma_n(\theta) \leq \Theta_0 \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta.$$

On en déduit directement la minoration de  $n(\theta)$  annoncée.  $\square$

**Remarque 2.20.** Soit  $d \in (\Theta_0, 1)$  et soit  $n(\theta, d)$  le nombre de valeurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  inférieures à  $d$ . Nous rappelons que  $\mu_1^N(\tau)$  est la plus petite valeur propre de l'opérateur  $\mathfrak{h}_\tau^N$  défini en (B.24). Alors on trouve dans [MT05] un équivalent de  $n(\theta, d)$  :

$$n(\theta, d) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\pi \sin \theta} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{(d - \mu_1^N(\tau))_+} d\tau.$$

La proposition précédente montre que  $n(\theta)$  tend vers  $\infty$  lorsque  $\theta$  tend vers 0, mais les quasi-modes que nous avons construits dans la preuve de la proposition 2.10 ont tous une énergie qui tend vers  $\Theta_0$ . Nous allons montrer que le spectre de  $\mathcal{L}_\theta$  se densifie bien dans  $(\Theta_0, 1)$  quand  $\theta$  tend vers 0. Nous commençons par construire de nouveaux quasi-modes :

**Lemme 2.21.** *Soit  $\zeta > 0$  et soit  $n \geq 1$  un entier tel que*

$$\mu_1^N(\zeta) \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta < 1, \quad (2.52)$$

*alors il existe  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathcal{L}_\theta$  et une constante  $C_\zeta > 0$  telles que*

$$|\mu_1^N(\zeta) \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta - \lambda| < C_\zeta \sqrt{2 \cos \theta \sin \theta} \sqrt{(n - 1)^2 + 1}.$$

*Preuve :* Nous rappelons que  $u_\zeta^N$  est la fonction propre associée à la première valeur propre  $\mu_1^N(\zeta)$  de  $\mathfrak{h}_\zeta^N$ . Nous suivons l'idée de la preuve de la proposition 2.10 et nous définissons

$$\tilde{u}_{n,\theta;\zeta}(s, t) := (\cos \theta \sin \theta)^{\frac{1}{4}} u_\zeta^N(t\sqrt{\cos \theta}) \psi_n\left(s\sqrt{\sin \theta} - \frac{\zeta}{\sqrt{\tan \theta}}\right). \quad (2.53)$$

Ces fonctions sont clairement dans le domaine de  $\mathcal{L}_\theta$  puisque  $u_\zeta^N$  vérifie la condition de Neumann en 0. On a :

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 \tilde{u}_{n,\theta;\zeta}(s, t) &= \cos \theta \left( \mu(\zeta) - (t\sqrt{\cos \theta} - \zeta)^2 \right) \tilde{u}_{n,\theta;\zeta}(s, t), \\ -\partial_s^2 \tilde{u}_{n,\theta;\zeta}(s, t) &= \sin \theta \left( 2n - 1 - \left( s\sqrt{\sin \theta} - \frac{\zeta}{\sqrt{\tan \theta}} \right)^2 \right) \tilde{u}_{n,\theta;\zeta}(s, t). \end{aligned}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\theta \tilde{u}_{n,\theta;\zeta} - (\mu(\zeta) \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta) \tilde{u}_{n,\theta;\zeta} = \\ 2(\cos \theta \sin \theta)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{\tan \theta}} - s\sqrt{\sin \theta} \right) (t\sqrt{\cos \theta} - \zeta) \tilde{u}_{n,\theta;\zeta}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

On note que l'on a  $\|\tilde{u}_{n,\theta;\zeta}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = 1$  et on a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_\theta \tilde{u}_{n,\theta;\zeta} - (\mu_1^N(\zeta) \cos \theta + (2n - 1) \sin \theta) \tilde{u}_{n,\theta;\zeta}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = \\ 2(\cos \theta \sin \theta)^{\frac{1}{2}} \|(t - \zeta) u_\zeta^N(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \|s \psi_n(s)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Il est bien connu que :

$$\int_{\mathbb{R}} s^2 \psi_n^2(s) \, ds = \frac{(n - 1)^2 + 1}{2}.$$

En définissant  $C_\zeta = \|(t - \zeta) u_\zeta^N\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$ , on conclut avec le théorème spectral.  $\square$

**Remarque 2.22.** Notons que le majorant de (2.52) tend vers  $+\infty$  si  $n$  devient grand. L'estimation ne donne donc rien si  $\theta$  est fixé et que  $n$  devient grand.

On va par contre se servir du lemme pour montrer qu'il existe une valeur propre près de n'importe quelle énergie fixée dans l'intervalle  $(\Theta_0, 1)$  dès que  $\theta$  est assez petit.

**Théorème 2.23.** *Le spectre de  $\mathcal{L}_\theta$  se densifie dans l'intervalle  $(\Theta_0, 1)$  au sens suivant :*

$$\forall \lambda_0 \in (\Theta_0, 1), \forall \varepsilon > 0, \exists \theta_* \in (0, \frac{\pi}{2}), \forall \theta \in (0, \theta_*], \exists \lambda \in \mathfrak{S}(\mathcal{L}_\theta), |\lambda_0 - \lambda| < \varepsilon. \quad (2.56)$$

*Preuve :* On peut supposer  $\varepsilon < 1$ . Soit  $\lambda_0 \in (\Theta_0, 1)$ , on sait que  $\mu([0, +\infty)) = [\Theta_0, 1]$ , donc il existe  $\zeta_0 > 0$  tel que  $\lambda_0 = \mu_1^N(\zeta_0)$ . On applique le lemme 2.21 pour  $\zeta = \zeta_0$  et en choisissant  $n = 1$ . On obtient alors (2.56).  $\square$

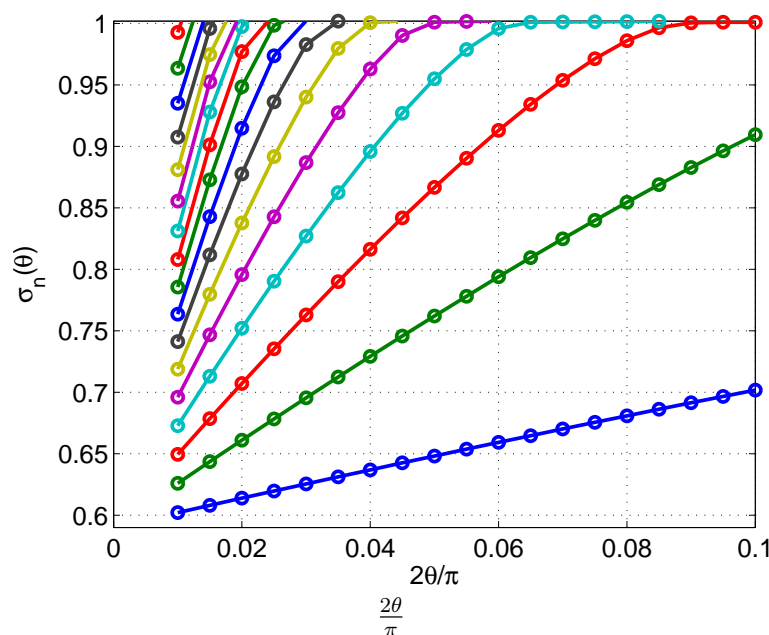


FIGURE 2.7 – Illustration de  $\sigma_n(\theta)$  pour  $n \leq 17$  en fonction de  $\vartheta := \frac{2\theta}{\pi}$  pour  $\vartheta = \frac{k}{100}$ ,  $k = 1, \dots, 20$ .

### Calculs numériques

Afin de voir la densification des valeurs propres dans l'intervalle  $(\Theta_0, 1)$ , nous représentons sur la figure 2.7 les 17 premières valeurs propres dans un rectangle  $R = (-100, 100) \times (0, 50)$ . Nous avons pris 20 éléments de degré  $\mathbb{Q}_6$  dans chaque direction. On observe bien que lorsque  $\theta$  tend vers 0, les valeurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  se répartissent dans l'intervalle  $(\Theta_0, 1)$ . Néanmoins nous rappelons qu'à  $n$  fixé, la  $n$ -ième valeur propre tend vers  $\Theta_0$  quand  $\theta$  tend vers 0. Ainsi plus  $\theta$  est petit, plus il faut calculer de valeurs propres pour voir la densification du spectre.

## 2.4 Construction de quasi-modes pour des angles petits

Nous avons prouvé dans la section précédente que le nombre de valeurs propres de l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  sous le spectre essentiel tend vers  $+\infty$  quand l'angle  $\theta$  entre la droite d'annulation du potentiel et le bord du demi-plan tend vers 0. Nous avons aussi vu que pour un rang  $n_*$  fixé, on a  $\sigma_{n_*}(\theta)$  qui tend vers  $\Theta_0$  quand  $\theta$  tend vers 0. Ainsi pour tout  $1 \leq n \leq n_*$ , on a  $\sigma_n(\theta) \leq \sigma_{n_*}(\theta) < 1$  dès que  $\theta$  est assez petit. Nous cherchons dans cette section un développement asymptotique des valeurs propres. Un changement de variables bien choisi permet de se ramener à une situation semi-classique et nous développons alors l'opérateur en puissances du petit paramètre. Nous cherchons des paires propres sous la forme de séries formelles. Cette approche nous permet de construire des quasi-modes dans le domaine de l'opérateur, et en utilisant le théorème spectral on déduit une majoration de la  $n$ -ième valeur propre.

### Changement de variables

Nous rappelons le changement de variables défini en (2.9) :

$$\begin{cases} y = s\sqrt{\sin \theta} - \frac{\xi_0}{\sqrt{\tan \theta}} \\ z = t\sqrt{\cos \theta} . \end{cases} \quad (2.57)$$

Remarquons que ce changement de variables laisse le demi-plan invariant. Dans ces nouvelles coordonnées, l'opérateur devient la réalisation de Neumann de

$$-\sin \theta \partial_y^2 - \cos \theta \partial_z^2 + \cos \theta (z - \xi_0 - y\sqrt{\tan \theta})^2, \quad (y, z) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (2.58)$$

Nous introduisons le paramètre semi-classique

$$h = \tan \theta$$

et le nouvel opérateur (avec condition de Neumann sur le bord  $\{z = 0\}$ ) :

$$\mathfrak{L}_h := -h\partial_y^2 - \partial_z^2 + (z - \xi_0 - yh^{1/2})^2 - \Theta_0, \quad (y, z) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (2.59)$$

de sorte que  $\mathcal{L}_\theta$  est isospectral à  $\cos \theta (\mathfrak{L}_h + \Theta_0)$ . Nous notons  $\mathfrak{s}_n(h)$  la  $n$ -ième valeur propre de  $\mathfrak{L}_h$  définie par le principe du min-max. En reprenant le changement de variables, on constate que l'on a

$$\sigma_n(\theta) = \cos \theta (\Theta_0 + \mathfrak{s}_n(\tan \theta)). \quad (2.60)$$

Ainsi afin d'étudier le spectre de l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  lorsque  $\theta$  tend vers 0, nous allons chercher une asymptotique des premières valeurs propres de l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$  quand  $h$  tend vers 0. Nous faisons un raisonnement heuristique : le paramètre semi-classique  $h$  étant devant le terme  $\partial_y^2$ , la variable  $z \in \mathbb{R}_+$  joue le rôle d'une variable "lente". Le terme  $-\partial_z^2 + (z - \xi_0 - yh^{1/2})^2 - \Theta_0$  peut intuitivement être assimilé à l'opérateur modèle  $\mathfrak{h}^N(\xi_0 + yh^{1/2}) - \Theta_0$  et remplacé par son énergie fondamentale définie comme la plus petite valeur propre de  $\mathfrak{h}^N(\xi_0 + yh^{1/2}) - \Theta_0$  :

$$W_h(y) := \mu_1^N(\xi_0 + yh^{1/2}) - \Theta_0 \quad (2.61)$$

Nous sommes ainsi ramenés à étudier l'opérateur unidimensionnel

$$\mathfrak{L}_h^{\text{BO}} := -h\partial_y^2 + W_h(y), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (2.62)$$

L'opérateur  $\mathfrak{L}_h^{\text{BO}}$  est défini comme l'approximation de Born-Oppenheimer de  $\mathfrak{L}_h$ . Puisque  $\tau \mapsto \mu_1^N(\tau)$  admet  $\Theta_0$  comme unique minimum non dégénéré en  $\tau = \xi_0$ , l'approximation harmonique (dont nous avons déjà utilisé l'idée principale dans la preuve du théorème 1.7) permet de remplacer le potentiel  $W_h(y)$  par  $\frac{1}{2}(\mu_1^N)''(\xi_0)hy^2$  (voir [DS99]) et de se ramener ainsi à un oscillateur harmonique semi-classique. Nous verrons dans la section suivante comment appliquer ce procédé de réduction de dimension, connu comme "l'approximation de Born-Oppenheimer" (voir [Mar89]).



### Développement en série de l'opérateur et recherche d'une solution formelle

On développe l'opérateur introduit en (2.59) en puissances du paramètre  $h$  :

$$\mathfrak{L}_h = P_0 + h^{1/2}P_1 + hP_2$$

avec

$$\begin{cases} P_0 = -\partial_z^2 + (z - \xi_0)^2 - \Theta_0 , & (2.63a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = -2(z - \xi_0)y , & (2.63b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 = \partial_y^2 + y^2 . & (2.63c) \end{cases}$$

Bien que ces opérateurs agissent sur  $\text{Dom}(\mathfrak{L}_h)$ , donc sur des fonctions du demi-plan, nous faisons une analogie formelle avec les opérateurs unidimensionnels étudiés au chapitre 1 :

$$\begin{cases} P_0 = \mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0 , & (2.64a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = 2y(\partial_\tau \mathfrak{h}_\tau^N)_{\tau=\xi_0} , & (2.64b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 = \mathfrak{h} . & (2.64c) \end{cases}$$

Ces analogies vont nous aider pour construire des quasi-modes pour l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$ . Nous cherchons une solution au problème  $\mathfrak{L}_h u_h = \gamma_h u_h$  sous la forme de séries formelles. Plus précisément nous cherchons

$$u_h = \sum_{j \geq 0} \phi_j h^{j/2} \quad \text{et} \quad \gamma_h = \sum_{j \geq 0} \gamma_j h^{j/2} . \quad (2.65)$$

Nous avons que  $(u_h, \gamma_h)$  est une paire propre de l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$  (au sens des séries formelles) si et seulement si le système d'équations suivant est formellement vérifié :

$$\begin{cases} h^0 : (P_0 - \gamma_0)\phi_0 = 0 , & (2.66a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^{1/2} : (P_0 - \gamma_0)\phi_1 = \gamma_1\phi_0 - P_1\phi_0 , & (2.66b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^1 : (P_0 - \gamma_0)\phi_2 = \gamma_2\phi_0 + \gamma_1\phi_1 - P_2\phi_0 - P_1\phi_1 , & (2.66c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h^{j/2} : (P_0 - \gamma_0)\phi_j = \sum_{k \geq 0} \gamma_{j-k}\phi_k - P_2\phi_{j-2} - P_1\phi_{j-1} . & (2.66d) \end{cases}$$

### Résolution des premiers termes

TERME EN  $h^0$  : Nous commençons par résoudre la première équation. L'analogie donnée par (2.64a) nous amène au raisonnement suivant : à  $y$  fixé, l'opérateur  $P_0$  peut être vu comme un opérateur unidimensionnel agissant sur  $\text{Dom}(\mathfrak{h}_{\xi_0}^N)$ . On cherche donc  $u_0$  sous la forme d'une fonction tensorisée :

$$\phi_0(y, z) = f_0(y)g(z) .$$

L'équation (2.66a) impose alors

$$(\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0)g = \gamma_0 g .$$

Puisque nous cherchons à construire  $\gamma_h$  le plus petit possible, nous sommes amenés à prendre

$$\gamma_0 = 0 \quad \text{et} \quad g = u_{\xi_0}^N. \quad (2.67)$$

où  $(\Theta_0, u_{\xi_0}^N)$  est la première paire propre de  $\mathfrak{h}_{\xi_0}^N$  définie dans la section 1.3. Notons que la fonction  $f_0$  n'est pas encore déterminée.

TERME EN  $h^{1/2}$  : L'équation (2.66b) se réécrit formellement

$$(\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0) \phi_1 = \gamma_1 \phi_0 - P_1 \phi_0. \quad (2.68)$$

Notons que si  $\phi_1$  est dans le domaine de l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$ , on a

$$\langle (\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0) \phi_1, u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+} = \langle \phi_1, (\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0) u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+} = 0.$$

En projetant l'équation (2.68) sur  $u_{\xi_0}^N$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , on voit qu'une condition nécessaire pour avoir une solution formelle est que la relation suivante (dite "relation de compatibilité") soit vérifiée :

$$\langle \gamma_1 \phi_0 - P_1 \phi_0, u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+} = 0,$$

c'est-à-dire

$$f_0(y) \left( \gamma_1 \|u_{\xi_0}^N\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 + 2y \langle (z - \xi_0) u_{\xi_0}^N, u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+} \right) = 0, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (2.69)$$

Soit en utilisant (1.16) :

$$\gamma_1 = 0. \quad (2.70)$$

Nous cherchons maintenant une solution particulière de (2.68). Rappelons que nous notons  $v_\tau^N = \partial_\tau u_\tau^N$  où  $u_\tau^N$  vérifie l'équation unidimensionnelle

$$\mathfrak{h}_\tau^N u_\tau^N(z) = \mu_1^N(\tau) u_\tau^N(z).$$

Nous dérivons cette équation par rapport au paramètre  $\tau$  et nous l'évaluons en  $\xi_0$  :

$$\mathfrak{h}_{\xi_0}^N v_{\xi_0}^N(z) - 2(z - \xi_0) u_{\xi_0}^N = (\mu_1^N)'(\xi_0) u_{\xi_0}^N(z) + \mu_1^N(\xi_0) v_{\xi_0}^N(z).$$

Or on a

$$\mu_1^N(\xi_0) = \Theta_0 \quad \text{et} \quad (\mu_1^N)'(\xi_0) = 0.$$

On a donc la relation

$$(\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0) v_{\xi_0}^N(z) = 2(z - \xi_0) v_{\xi_0}^N(z). \quad (2.71)$$

**Remarque 2.24.** Ces calculs permettent de retrouver formellement la formule de Feynman-Hellmann (voir la proposition A.5).

Ainsi, compte tenu de (2.63b) et de (2.70), une solution particulière de (2.68) est donnée par  $(y, z) \mapsto -2y f_0(y) v_{\xi_0}^N(z)$ . Puisque le noyau de  $\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0$  est composé de  $u_{\xi_0}^N$ , on cherche une solution générale de (2.68) sous la forme

$$\phi_1(y, z) = f_1(y) u_{\xi_0}^N(z) - 2y f_0(y) v_{\xi_0}^N(z).$$

Notons qu'à ce stade les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  ne sont pas encore déterminées.

TERME EN  $h$  : Nous réécrivons (2.66c) en utilisant les relations précédentes :

$$(\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0) \phi_2(y, z) = \gamma_2 f_0(y) u_{\xi_0}^N(z) - P_2 f_0(y) u_{\xi_0}^N(z) - P_1 f_1(y) u_{\xi_0}^N(z) - P_1 y f_0(y) v_{\xi_0}^N(z) .$$

En utilisant à nouveau (2.71), une solution particulière de

$$(\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0) \phi(y, z) = -P_1 f_1(y) u_{\xi_0}^N(z) \quad (2.72)$$

est donnée par  $2y f_1(y)(z - \xi_0) v_{\xi_0}^N(z)$ . Nous cherchons donc  $\phi_2$  sous la forme

$$\phi_2(y, z) = \phi_2^\perp(y, z) + 2y f_1(y)(z - \xi_0) v_{\xi_0}^N(z) .$$

On a que  $\phi_2$  est solution de (2.66c) si et seulement si  $\phi_2^\perp$  vérifie l'équation

$$(\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0) \phi_2^\perp(y, z) = \gamma_2 f_0(y) u_{\xi_0}^N(z) - P_2 f_0(y) u_{\xi_0}^N(z) - P_1 y f_0(y) v_{\xi_0}^N(z) . \quad (2.73)$$

Remarquons que dans cette équation seuls  $\gamma_2$  et  $f_0$  sont inconnus dans le membre de droite. Afin d'écrire la condition de compatibilité, nous projetons cette équation sur  $u_{\xi_0}^N(z)$ . On obtient

$$\gamma_2 f_0(y) - P_2 f_0(y) + 2y^2 f_0(y) \langle (z - \xi_0) v_{\xi_0}^N, u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+} = 0, \quad y \in \mathbb{R} . \quad (2.74)$$

D'après (1.17), on a

$$\langle (z - \xi_0) v_{\xi_0}^N, u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+} = \frac{1}{2} - \frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{4} .$$

Introduisons la constante strictement positive

$$a := \frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2}$$

et l'oscillateur harmonique dilaté défini par

$$\mathfrak{h}_a = -\partial_y^2 + ay^2, \quad y \in \mathbb{R} . \quad (2.75)$$

En utilisant la définition de  $P_2$  (voir (2.64c)) et l'équation (2.74), on voit que le couple  $(\gamma_2, f_0)$  vérifie l'équation

$$\mathfrak{h}_a f_0(y) = \gamma_2 f_0(y), \quad y \in \mathbb{R} .$$

Ainsi l'opérateur apparaissant naturellement pour construire les quasi-modes est l'oscillateur harmonique (à une dilatation près). Nous sommes donc amenés à prendre

$$\gamma_2 = (2n - 1)a^{1/2} \quad \text{et} \quad f_0(y) = a^{-1/8} \psi_n(a^{1/4}y) . \quad (2.76)$$

Grâce à l'alternative de Fredholm appliquée à l'équation (2.73), ce choix de  $(\gamma_2, f_0)$  permet de déterminer de manière unique  $\phi_2^\perp$ , de plus  $\phi_2^\perp$  est dans la classe de Schwartz.

### Construction du terme général

CONSTRUCTION PAR RÉCURRENCE : Nous faisons les hypothèses de récurrence suivantes : nous supposons que nous avons construit les  $(\gamma_k)_{0 \leq k \leq j}$ . Supposons aussi que pour  $0 \leq k \leq j$ , les fonctions  $\phi_k$  peuvent s'écrire

$$\phi_k(y, z) = \phi_k^\perp(y, z) + y f_{k-1}(y) v_{\xi_0}^N(z) + f_k(y) u_{\xi_0}^N(z) \quad (2.77)$$

où les fonctions  $\phi_k^\perp$  sont orthogonales au noyau de  $(\mathbf{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0)$ , c'est-à-dire vérifient

$$\langle \phi_k^\perp, u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+} = 0.$$

Nous supposons que les  $(f_j)_{0 \leq k \leq j-2}$  sont déterminées et sont dans la classe de Schwartz (que nous notons  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ). Nous supposons aussi que les  $(\phi_k^\perp)_{0 \leq k \leq j}$  sont déterminés et sont dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^2)$ .

Nous prenons  $f_{-1} = 0$  et  $\phi_1^\perp = 0$ . On utilise (2.67), (2.70) et (2.76) pour déterminer  $(\gamma_k)_{0 \leq j \leq 2}$  et  $f_0$ . La fonction  $\phi_2^\perp$  est déterminée grâce à (2.73). Les hypothèses de récurrence sont alors vérifiées pour  $j = 2$ .

Nous vérifions maintenant l'hypothèse de récurrence au rang  $j + 1$  : pour cela nous construisons  $(\gamma_{j+1}, \phi_{j+1}^\perp, f_{j-1})$  en utilisant la relation d'égalité des séries formelles (définie en (2.66d)) au rang  $j + 1$  :

$$(\mathbf{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0) \phi_{j+1} = \sum_{k=0}^j \gamma_{j+1-k} \phi_k - P_2 \phi_{j-1} - P_1 \phi_j. \quad (2.78)$$

Nous cherchons  $\phi_{j+1}$  sous la forme

$$\phi_{j+1}(y, z) = \phi_{j+1}^\perp(y, z) + y f_j(y) v_{\xi_0}^N(z) + f_{j+1}(y) u_{\xi_0}^N(z).$$

En injectant cet ansatz dans (2.78), on a

$$(\mathbf{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0) \phi_{j+1}^\perp = \gamma_{j+1} f_0 u_{\xi_0}^N + \gamma_2 f_{j-2} u_{\xi_0}^N - P_2(f_{j-1} u_{\xi_0}^N) - P_1(y f_{j-1} v_{\xi_0}^N) + R_j, \quad (2.79)$$

avec

$$R_j = \sum_{k=1}^{j-2} \gamma_{j+1-k} \phi_k + \gamma_2 \phi_{j-1}^\perp + \gamma_2 y f_{j-1} v_{\xi_0}^N - P_2 \phi_{j-1}^\perp - P_2(y f_{j-2} v_{\xi_0}^N) - P_1 \phi_j^\perp.$$

D'après l'hypothèse de récurrence,  $R_j$  est connu et appartient à  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^2)$ . Nous écrivons la relation de compatibilité en intégrant (2.79) contre  $u_{\xi_0}^N$  et on trouve :

$$\gamma_{j+1} f_0(y) + \gamma_2 f_{j-1}(y) = P_2 f_{j-1}(y) - 2y^2 f_{j-1}(y) \langle (z - \xi_0) v_{\xi_0}^N, u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+} - g_j(y) \quad (2.80)$$

avec  $g_j(y) = \langle R_j, u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+}$ . Notons que  $g_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . En utilisant à nouveau (2.64c) et (1.17), (2.80) se met sous la forme

$$(\mathbf{h}_a - \gamma_2) f_{j-1} = \gamma_{j+1} f_0 + g_j. \quad (2.81)$$

où l'opérateur  $\mathbf{h}_a$  a été défini en (2.75). Pour pouvoir résoudre cette équation, il faut que le membre de droite soit orthogonal au noyau de  $\mathbf{h}_a - \gamma_2$ . Cela impose

$$\gamma_{j+1} + \langle g_j, f_0 \rangle_{y \in \mathbb{R}} = 0$$

et  $\gamma_{j+1}$  est ainsi déterminé. D'après l'alternative de Fredholm, la fonction  $f_{j-1}$  est alors déterminée de manière unique dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . De même l'alternative de Fredholm permet de construire  $\phi_{j+1}^\perp$  grâce à (2.79), et l'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang  $j+1$ .

**ANNULATIONS DES TERMES IMPAIRS :** Nous avons constaté que  $\gamma_1$  est nul. Des simulations numériques (voir [BNDPR12]) ont confirmé la valeur de  $\gamma_{2,n}$  trouvée formellement en (2.76). Elles ont aussi mis en évidence le fait que  $\gamma_{3,n} = 0$ . En raisonnant sur la parité des fonctions construites, nous allons voir que tous les termes impairs dans la série formelle  $\gamma_h$  s'annulent. Remarquons que puisque  $f_0$  est une fonction d'Hermite (à une dilatation près), elle est soit paire soit impaire. Puisque l'analyse est exactement la même dans les deux cas, nous allons supposer que  $f_0$  est paire. Notons aussi que  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement pair et impair par rapport à la variable  $y$ . On voit donc que le second membre de (2.73) est pair par rapport à la variable  $y$ . L'unicité garantie par l'alternative de Fredholm nous dit donc que  $\phi_2^\perp$  est pair par rapport à la variable  $y$ . Nous faisons l'hypothèse que les  $(f_k)_{0 \leq k \leq j-2}$  sont alternativement pairs et impairs :  $f_k$  est de la parité de  $k$ . De même nous supposons que pour  $2 \leq k \leq j$ ,  $\phi_k^\perp$  est de la parité de  $k$ . Nous supposons aussi que les  $\gamma_k$  sont nuls si  $k \leq j$  et si  $k$  est impair. A partir de ces hypothèses de récurrence, on constate que  $R_j$  et  $g_j$  ont la parité de  $j-1$ .

- Si  $j$  est pair, on a que  $g_j$  est impair et donc  $\langle g_j, f_0 \rangle_{y \in \mathbb{R}} = 0$ . On obtient donc que  $\gamma_{j+1} = 0$ . L'alternative de Fredholm appliquée à l'équation (2.81) implique que  $f_{j-1}$  est impair. En utilisant la parité de  $P_1$  et  $P_2$ , on voit que le terme de droite dans (2.79) est impair par rapport à la variable  $y$ . Par unicité de la solution de (2.79) orthogonale à  $u_{\xi_0}^N$ , on a donc que  $\phi_{j+1}^\perp$  est impair.
- Si  $j$  est impair,  $f_{j-1}$  est pair d'après (2.81) sans condition sur  $\gamma_{j+1}$ . On déduit de la même manière que  $\phi_{j+1}^\perp$  est pair. Le principe de récurrence permet de conclure.

## Synthèse et application du théorème spectral

Remarquons que les  $\phi_j$  construits sont bien tous dans la classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^2)$  et que par construction ils vérifient tous la condition de Neumann en  $\{z = 0\}$ . Définissons

$$\mathbf{u}_{h,n}^J = \sum_{j=0}^{2J} \phi_j h^{j/2}$$

le  $n$ -ième quasi-mode d'ordre  $J$  pour  $\mathfrak{L}_h$ . On a que  $\mathbf{u}_{h,n}^J \in \text{Dom}(\mathfrak{L}_h)$ . Dans la suite nous notons  $\gamma_{2j} = \gamma_{2j,n}$  pour rappeler que ces réels dépendent de  $n$ . Nous rappelons que nous avons montré que  $\gamma_{0,n} = 0$  et  $\gamma_{2,n} = (2n-1) \left( \frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2} \right)^{1/2}$ . Nous avons aussi montré que les  $\gamma_{2j+1,n}$  étaient nuls. Nous définissons la quasi-valeur propre d'ordre  $J$  :

$$\mathfrak{s}_n^J(h) := \sum_{j=0}^J \gamma_{2j,n} h^j. \quad (2.82)$$

L'analyse précédente assure alors que pour  $n$  et  $J$  fixé, on a

$$\exists C_{n,J} > 0, \exists h_0 > 0, \forall h \in (0, h_0), \quad \|(\mathfrak{L}_h - \mathfrak{s}_n^J(h)) \mathbf{u}_{h,n}^J\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq C_{n,J} h^{J+1} \|\mathbf{u}_{h,n}^J\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}. \quad (2.83)$$

En appliquant le théorème spectral pour les paires  $(\mathfrak{s}_n^J(h), \mathbf{u}_{h,n}^J)_{1 \leq n \leq n_*}$ , on a directement la proposition suivante :

**Proposition 2.25.** *Pour tout  $n_* \geq 1$  et pour tout  $J \geq 1$ , il existe des constantes  $C_{n_*,J} > 0$  et  $h_0 > 0$  telles que pour tout  $1 \leq n \leq n_*$  on a*

$$\text{dist}(\mathfrak{S}(\mathfrak{L}_h), \mathfrak{s}_n^J(h)) \leq C_{n_*,J} h^{J+1}.$$

On sait ainsi qu'il y a une valeur propre de  $\mathfrak{L}_h$  dans un voisinage de  $\mathfrak{s}_n^J(h)$  de taille  $h^{J+1}$  dès que  $h$  est assez petit. On ne sait pas encore qu'il s'agit de la  $n$ -ième : les valeurs propres pourraient s'accumuler près d'un de ces développements asymptotiques. Pour le moment nous pouvons seulement déduire une majoration de la  $n$ -ième valeur propre  $\mathfrak{s}_n(h)$ . On a en particulier :

**Corollaire 2.26.** *Pour  $1 \leq n \leq n_*$  et  $h \in (0, h_0)$ , on a*

$$0 \leq \mathfrak{s}_n(h) \leq \gamma_{2,n} h + C_{n_*,1} h^2. \quad (2.84)$$

## 2.5 Développement asymptotique des valeurs propres

Nous avons construit dans la section précédente la série formelle  $\gamma_h$  en cherchant une paire propre pour l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$ . En tronquant cette série à l'ordre  $J$ , nous avons obtenu une quasi-valeur propre  $\mathfrak{s}_n^J(h)$  (voir (2.82)). Cette quasi-valeur propre fournit une majoration de la  $n$ -ième valeur propre de  $\mathfrak{L}_h$ . Pour démontrer que  $\mathfrak{s}_n^J(h)$  fournit le développement asymptotique de la  $n$ -ième valeur propre à l'ordre  $J$ , nous allons effectuer une minoration de  $\mathfrak{s}_n(h)$  quand le paramètre  $h$  tend vers 0.

### Heuristique de la preuve

Nous détaillons le raisonnement réalisé au début de la section précédente. Nous rappelons que nous cherchons (quand  $h$  tend vers 0) les plus petites valeurs propres de l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$  défini comme la réalisation de Neumann de

$$-h\partial_y^2 - \partial_z^2 + (z - \xi_0 - yh^{1/2})^2 - \Theta_0, \quad (y, z) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Soit  $u \in \text{Dom}(\mathfrak{L}_h)$ , on a clairement la minoration

$$\langle (-\partial_z^2 + (z - \xi_0 - yh^{1/2})^2 - \Theta_0)u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} W_h(y) |u(y, z)|^2 dy dz$$

où le potentiel  $W_h(y) := \mu_1^N(\xi_0 + yh^{1/2}) - \Theta_0$  a été défini en (2.61). Rappelons que nous définissons l'approximation de Born-Oppenheimer comme l'opérateur unidimensionnel

$$\mathfrak{L}_h^{\text{BO}} := -h\partial_y^2 + W_h(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

On étend  $\mathfrak{L}_h^{\text{BO}}$  en un opérateur agissant sur  $\text{Dom}(\mathfrak{L}_h)$ . On le note  $\mathfrak{L}_h^{\text{BO}, 2\text{d}}$  et on a alors (au sens des formes quadratiques) :

$$\mathfrak{L}_h \geq \mathfrak{L}_h^{\text{BO}, 2\text{d}}. \quad (2.85)$$

Puisque le potentiel  $W_h$  possède un unique minimum non dégénéré, on peut trouver un développement asymptotique des valeurs propres de  $\mathfrak{L}_h^{\text{BO}}$  grâce à l'approximation harmonique et sa première valeur propre est simple. On en déduit que la première valeur propre de l'opérateur  $\mathfrak{L}_h^{\text{BO}, 2\text{d}}$  est égale à celle de  $\mathfrak{L}_h^{\text{BO}}$ , mais elle est de multiplicité infinie. Ainsi on ne peut déduire de l'inégalité (2.85) qu'une minoration grossière sur la première valeur propre de l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$ . Afin de montrer que l'approximation de Born-Oppenheimer (définie comme étant l'opérateur  $\mathfrak{L}_h^{\text{BO}}$ ) est le bon opérateur modèle pour décrire l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$ , nous allons utiliser des estimations d'Agmon et un procédé de Grushin. Ces méthodes peuvent être comparées aux résultats de [Mar89], mais notre cadre est différent : d'une part l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$  n'est pas à résolvante compacte, d'autre part le domaine d'intégration est une variété à bord.

Soit  $n_*$  fixé, on suppose dans la suite que  $h$  est assez petit pour que  $\mathfrak{s}_{n_*}(h) < 1$ . Soit  $n_0 \leq n_*$ , nous allons prouver des estimées de concentrations pour les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $(\mathfrak{s}_n(h))_{1 \leq n \leq n_0}$ .

**Définition 2.27.** Soit  $n \leq n_0$ , on note  $\mathbf{u}_{h,n}$  le  $n$ -ième vecteur propre normalisé associé à la valeur propre  $\mathfrak{s}_n(h)$ . Les vecteurs propres  $\mathbf{u}_{h,n}$  sont orthogonaux deux à deux. On définit

$$\mathfrak{E}_{h,n_0} = \text{vect}(\mathbf{u}_{h,1}, \dots, \mathbf{u}_{h,n_0})$$

l'espace propre engendré par les vecteurs propres associés aux  $n_0$  premières valeurs propres.

### Nouvelles estimations d'Agmon

Nous commençons par réaliser de nouvelles estimations d'Agmon pour déterminer comment se comportent les vecteurs propres de  $\mathfrak{L}_h$  quand  $h$  tend vers 0. Il sera important de contrôler la dépendance des constantes par rapport au paramètre semi-classique  $h$ . La proposition suivante est juste une conséquence de l'estimation (2.38) dans les nouvelles variables  $(y, z)$  :

**Proposition 2.28.** Il existe des constantes  $C > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $h_0 > 0$  telles que pour  $h \in (0, h_0)$  on a

$$\forall v \in \mathfrak{E}_{h,n_0}, \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{2\gamma z} |v(y, z)|^2 dy dz \leq C \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \quad (2.86)$$

La proposition suivante complète le théorème 2.15 quand  $\theta$  tend vers 0 en donnant une estimation dans la variable “tangente”  $y$  uniforme par rapport au paramètre  $h$ . La preuve de cette proposition est une des clefs pour montrer que l'opérateur modèle  $\mathfrak{L}_h^{\text{BO}}$  est une bonne approximation pour  $\mathfrak{L}_h$  quand  $h$  tend vers 0.

**Proposition 2.29.** *Il existe des constantes  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  telles que pour  $h \in (0, h_0)$  on a*

$$\forall v \in \mathfrak{E}_{h,N_0}, \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{2|y|} |v(y, z)|^2 dy dz \leq C \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \quad (2.87)$$

*Preuve :* Les idées de la preuve sont classiques en dimension 1 (voir [Sim83] ou encore [DS99]) et nous la détaillons dans notre cas. Nous partons de la formule IMS (B.7) pour contrôler l'énergie de  $e^{|y|}v$  où  $v$  est un vecteur propre de  $\mathfrak{L}_h$ . La minoration (2.85) permet d'introduire le potentiel  $W_h(y)$ . Comme ce potentiel a un unique minimum en  $y = 0$ , on réalise alors une partition du domaine d'intégration selon que l'on est loin ou pas de ce minimum : d'une part on minore  $W_h(y)$  grossièrement loin de  $y = 0$ , d'autre part puisque ce minimum est non-dégénéré on peut estimer le potentiel à partir de son approximation quadratique près de  $y = 0$ . Le corollaire 2.26 permet de contrôler les valeurs propres qui apparaissent dans les formules IMS.

Notons  $\mathfrak{q}_h$  la forme quadratique associée à l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$ . Supposons que  $v = \mathbf{u}_{h,n}$  est un vecteur propre de  $\mathfrak{L}_h$  et introduisons la fonction  $\Phi(y) = |y|$ . En réalisant le changement d'échelle  $y \rightarrow h^{1/2}y$  dans l'identité (B.7), on obtient une formule IMS "semi-classique" :

$$\mathfrak{q}_h(e^\Phi v) = \int_{\mathbb{R}_+^2} (|\partial_z \Phi|^2 + h|\partial_y \Phi|^2 + \mathfrak{s}_n(h)) |e^\Phi v|^2 dy dz.$$

En utilisant (2.85) on a donc

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (W_h(y) - h - \mathfrak{s}_n(h)) |e^{|y|}v(y, z)|^2 dy dz \leq 0 \quad (2.88)$$

avec  $W_h(y) = \mu_1^N(\xi_0 + h^{1/2}y) - \Theta_0$ . On découpe à nouveau le domaine d'intégration selon les valeurs de  $W_h(y) - h - \mathfrak{s}_n(h)$ .

- Lorsque nous ne sommes pas trop éloignés de  $\xi_0$ , puisque le minimum de  $\mu_1^N$  est non dégénéré, on sait qu'il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que

$$W_h(y) \geq \frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{4} y^2 h \quad \text{dès que } |y| \leq \epsilon_0 h^{-1/2}. \quad (2.89)$$

- Si on est loin du minimum, c'est-à-dire si  $|y| \geq \epsilon_0 h^{-1/2}$ , on a

$$W_h(y) \geq \eta_0 \geq 0$$

avec  $\eta_0 = \min\{\mu_1^N(\xi_0 \pm \epsilon_0)\} - \Theta_0$ .

Soit  $C_0 > 0$ . D'après ce qui précède, on a donc

$$W_h(y) \geq \min \left\{ \eta_0, \frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{4} C_0^2 h \right\} \quad \text{dès que } |y| \geq C_0. \quad (2.90)$$

En utilisant le corollaire 2.26 et en choisissant  $C_0$  assez grand, on a donc pour  $h$  assez petit l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que

$$W_h(y) - h - \mathfrak{s}_n(h) \geq ch \quad \text{dès que } |y| \geq C_0. \quad (2.91)$$



En découpant le demi-plan selon  $|y| \geq C_0$  et  $|y| < C_0$  dans (2.88), on obtient :

$$ch \int_{|y| \geq C_0} |e^{|y|} v(y, z)|^2 dy dz \leq \int_{y \leq C_0} |W_h(y) - h - \mathfrak{s}_n(h)| |e^{|y|} v(y, z)|^2 dy dz . \quad (2.92)$$

Or en utilisant encore que  $W_h(y)$  est minimum en  $y = 0$  on obtient :

$$\exists C'_0 > 0, \quad |W_h(y)| \leq C'_0 h \quad \text{dès que } |y| \leq C_0 .$$

Nous utilisons à nouveau le corollaire 2.26 pour trouver que

$$\exists C_1 > 0, \quad |W_h(y) - h - \mathfrak{s}_n(h)| \leq C_1 h \quad \text{dès que } |y| \leq C_0 .$$

Ainsi à partir de (2.92) on a

$$\int_{|y| \geq C_0} |e^{|y|} v(y, z)|^2 dy dz \leq \frac{C_1 e^{2C_0}}{c} \int_{y \leq C_0} |v(y, z)|^2 dy dz$$

puis

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |e^{|y|} v(y, z)|^2 dy dz \leq \left( \frac{C_1 e^{2C_0}}{c} + e^{2C_0} \right) \int_{y \leq C_0} |v(y, z)|^2 dy dz .$$

Il reste à démontrer le cas général où  $v \in \mathfrak{E}_{h, n_0}$ . L'estimation est une conséquence directe du fait que les  $\mathbf{u}_{h, n}$  sont orthogonaux et que  $\mathfrak{E}_{h, n_0}$  est de dimension finie.  $\square$

On en déduit des contrôles des moments qui nous serviront pour minorer la forme quadratique  $\mathbf{q}_h$  de l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$ . L'uniformité des constantes par rapport à  $h$  est particulièrement importante :

**Corollaire 2.30.** *Soit  $k = (k_1, k_2)$  un couple d'entiers positifs, alors il existe des constantes  $C_k > 0$ ,  $\delta > 0$  et  $h_0 > 0$  telles que pour  $h \in (0, h_0)$  on a*

$$\forall v \in \mathfrak{E}_{h, n_0}, \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} |y|^{k_1} z^{k_2} |v(y, z)|^2 dy dz \leq C_k \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 . \quad (2.93)$$

On peut aussi contrôler l'énergie des vecteurs propres et leurs moments à l'infini :

**Corollaire 2.31.** *Pour tout  $\epsilon_0 > 0$ , il existe des constantes  $h_0 > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $C > 0$  telles que pour  $h \in (0, h_0)$  on a*

$$\forall v \in \mathfrak{E}_{h, N_0}, \quad \int_{|y| \geq \epsilon_0 h^{-1/2}} (1 + |y|^4) |v(y, z)|^2 dy dz \leq C e^{-\gamma h^{-1/2}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 . \quad (2.94)$$

*Preuve :* Commençons par le moment d'ordre 0 : soit  $\epsilon_0 > 0$ , alors il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que pour  $h \in (0, h_0)$  :

$$\int_{|y| \geq \epsilon_0 h^{-1/2}} e^{2|y|} |v(y, z)|^2 dy dz \leq C_0 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 .$$

On minore le facteur exponentiel sur le domaine  $\{y \geq \epsilon_0 h^{-1/2}\}$  et on trouve

$$\int_{|y| \geq \epsilon_0 h^{-1/2}} |v(y, z)|^2 dy dz \leq C_0 e^{-2\epsilon_0 h^{-1/2}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 .$$

Soit  $\delta \in (0, 2)$ , en utilisant (2.87) on a qu'il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que pour  $h \in (0, h_0)$  :

$$\int_{|y| \geq \epsilon_0 h^{-1/2}} y^4 e^{\delta|y|} |v(y, z)|^2 dy dz \leq C_1 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2.$$

En appliquant le même raisonnement que précédemment, on a

$$\int_{|y| \geq \epsilon_0 h^{-1/2}} y^4 |v(y, z)|^2 dy dz \leq C_1 e^{-\delta \epsilon_0 h^{-1/2}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2.$$

On somme ces deux estimations et le corollaire est prouvé.  $\square$

### Approximation des vecteurs propres

Nous rappelons que nous voulons montrer que les vecteurs propres  $\mathbf{u}_{h,n}$  sont proches des quasi-modes construits dans la section 2.4. Pour cela nous allons projeter ces vecteurs propres sur le noyau de  $\mathbf{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0$ , et nous servir des estimées d'Agmon montrées plus haut pour estimer la norme de cette projection quand  $h$  tend vers 0. On se servira alors des vecteurs propres de  $\mathfrak{L}_h$  comme de quasi-modes pour l'opérateur  $\mathfrak{L}_h^{\text{BO}}$  dont le spectre est explicite, et le théorème spectral nous permettra de conclure. Remarquons que cette idée d'inverser les rôles des fonctions propres et des quasi-modes est très fertile. C'est une des idées principales du processus de Grushin (voir [Gru72]).

**Définition 2.32.** Nous introduisons la projection sur l'espace propre engendré par le vecteur propre de l'opérateur modèle. Soit donc

$$\Pi_0 : L^2(\mathbb{R}_+^2) \mapsto L^2(\mathbb{R}) \otimes \text{vect}(u_{\xi_0}^N)$$

le projecteur défini par

$$\Pi_0 w = \langle w, u_{\xi_0}^N \rangle_{z \in \mathbb{R}_+} u_{\xi_0}^N.$$

On a alors les estimations suivantes :

**Proposition 2.33.** Soit  $Q$  la forme quadratique associée à l'opérateur  $Id_{L^2(\mathbb{R})} \otimes (\mathbf{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0)$  :

$$\forall w \in \text{Dom}(\mathfrak{L}_h), \quad Q(w) = \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial_z w|^2 + ((z - \xi_0)^2 - \Theta_0) |w|^2 dy dz.$$

Il existe deux constantes  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  telles que pour  $h \in (0, h_0)$  et  $\mathbf{u}_{h,n} \in \mathfrak{E}_{h,n_0}$  on a

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}_{h,n} - \Pi_0 \mathbf{u}_{h,n}) &\leq Ch^{1/2} \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \\ Q(\partial_y \mathbf{u}_{h,n} - \Pi_0(\partial_y \mathbf{u}_{h,n})) &\leq Ch^{1/4} \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \\ Q(y \mathbf{u}_{h,n} - \Pi_0 y \mathbf{u}_{h,n}) &\leq Ch^{1/2} \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \end{aligned}$$

*Preuve :* Puisque  $\Theta_0 = \inf \mathfrak{S}(\mathfrak{h}_{\xi_0}^N)$ , il est clair que la forme quadratique  $Q$  est positive :

$$\forall w \in L^2(\mathbb{R}) \otimes B^1(\mathbb{R}_+), \quad Q(w) \geq 0.$$

De plus il est clair que  $(Id_{L^2(\mathbb{R})} \otimes (\mathfrak{h}_{\xi_0}^N - \Theta_0)) \Pi_0 w = 0$  pour  $w \in L^2(\mathbb{R}) \otimes B^1(\mathbb{R}_+)$ . On a donc

$$\forall w \in \text{Dom}(\mathfrak{L}_h), \quad Q(w) = Q(w - \Pi_0 w),$$

ainsi pour démontrer la proposition, il suffira de borner  $Q(\mathbf{u}_{h,n})$ ,  $Q(\partial_y \mathbf{u}_{h,n})$  et  $Q(y \mathbf{u}_{h,n})$ . Une fois ces considérations effectuées, nous utilisons à plusieurs reprises l'équation aux valeurs propres pour relier les différentes quantités à estimer : en effet on a

$$\mathfrak{L}_h \mathbf{u}_{h,n} = \mathfrak{s}_n(h) \mathbf{u}_{h,n}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^2} h |\partial_y \mathbf{u}_{h,n}(y, z)|^2 + |\partial_z \mathbf{u}_{h,n}(y, z)|^2 + (z - \xi_0 - y h^{1/2})^2 |\mathbf{u}_{h,n}(y, z)|^2 dy dz \\ = \mathfrak{s}_n(h) \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \end{aligned} \quad (2.95)$$

On développe le potentiel pour faire apparaître la forme quadratique  $Q$  :

$$\begin{aligned} h \|\partial_y \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + Q(\mathbf{u}_{h,n}) - 2h^{1/2} \langle (z - \xi_0) y \mathbf{u}_{h,n}, \mathbf{u}_{h,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} + h \|y \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \\ = \mathfrak{s}_n(h) \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \end{aligned}$$

A partir du corollaire 2.26, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'estimation (2.93), on trouve qu'il existe une constante  $C_0$  telle que

$$Q(\mathbf{u}_{h,n}) \leq C_0 h^{1/2} \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2.$$

En exploitant à nouveau (2.95), on a directement

$$h \|\partial_y \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \leq \mathfrak{s}_n(h) \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2$$

et en utilisant une nouvelle fois le corollaire 2.26 pour contrôler la valeur propre, on a qu'il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$\|\partial_y \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \leq C_1 \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \quad (2.96)$$

Pour obtenir le contrôle en norme  $H^1$  sur  $\partial_y \mathbf{u}_{h,n}$ , on va dériver l'équation (2.95) par rapport à la variable  $y$ . Ceci est possible puisque les vecteurs propres sont dans la classe de Schwartz (voir [Ray09b], ou des résultats plus généraux comme [Hör05] par exemple). De plus en dérivant la condition de Neumann en  $\{z = 0\}$  par rapport à  $y$ , on constate que  $\partial_y \mathbf{u}_{h,n}$  vérifie encore la condition au bord. On a donc montré que  $\partial_y \mathbf{u}_{h,n} \in \text{Dom}(\mathfrak{L}_h)$ . On calcule  $\mathfrak{L}_h \partial_y \mathbf{u}_{h,n}$  et on fait apparaître un commutateur :

$$\mathfrak{L}_h(\partial_y \mathbf{u}_{h,n}) - 2h^{1/2}(z - \xi_0 - y h^{1/2}) \mathbf{u}_{h,n} = \mathfrak{s}_n(h) \partial_y \mathbf{u}_{h,n} \quad (2.97)$$

On a

$$h \|\partial_y^2 \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \leq \mathfrak{q}_h(\partial_y \mathbf{u}_{h,n})$$

En prenant le produit scalaire avec  $\mathbf{u}_{h,n}$  et en faisant une intégration par parties en  $y$  on obtient

$$\mathbf{q}_h(\partial_y \mathbf{u}_{h,n}) = \mathbf{s}_n(h) \|\partial_y \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + 2h^{1/2} \langle (z - \xi_0 - yh^{1/2}) \mathbf{u}_{h,n}, \partial_y \mathbf{u}_{h,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} . \quad (2.98)$$

En utilisant le corollaire 2.26, l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le commutateur ainsi que les estimations (2.93) et (2.96), on obtient

$$\|\partial_y^2 \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \leq C_3 h^{-1/2} \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \quad (2.99)$$

avec  $C_3 > 0$ . On reprend (2.97) afin de faire apparaître  $Q(\partial_y \mathbf{u}_{h,n})$  :

$$\begin{aligned} & h \|\partial_y^2 \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 - 2h^{1/2} \langle (z - \xi_0 - yh^{1/2}) \mathbf{u}_{h,n}, \partial_y \mathbf{u}_{h,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \\ & + Q(\partial_y \mathbf{u}_{h,n}) - 2h^{1/2} \langle (z - \xi_0) y \partial_y \mathbf{u}_{h,n}, \partial_y \mathbf{u}_{h,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} + h \|y \partial_y \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \\ & = \mathbf{s}_n(h) \|\partial_y \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \end{aligned}$$

Le seul terme nouveau à contrôler est  $2h^{1/2} \langle (z - \xi_0) y \partial_y \mathbf{u}_{h,n}, \partial_y \mathbf{u}_{h,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}$ . On réalise une intégration par parties en  $y$  puis on utilise l'inégalité Cauchy-Schwarz et (2.99) (en plus des estimations précédentes) pour trouver qu'il existe une constante  $C_4 > 0$  telle que

$$2h^{1/2} \langle (z - \xi_0) y \partial_y \mathbf{u}_{h,n}, \partial_y \mathbf{u}_{h,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq C_4 h^{1/4} \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 .$$

On trouve finalement qu'il existe une constante  $C_5 > 0$  telle que

$$Q(\partial_y \mathbf{u}_{h,n}) \leq C_5 h^{1/4} \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 .$$

Il ne reste plus qu'à contrôler  $y \mathbf{u}_{h,n}$ . Il est clair que cette fonction est encore dans le domaine de l'opérateur (elle est à la régularité de  $\mathbf{u}_{h,n}$  et vérifie la condition de Neumann). On a

$$\mathfrak{L}_h(y \mathbf{u}_{h,n}) + 2h \partial_y \mathbf{u}_{h,n} = \mathbf{s}_n(h) y \mathbf{u}_{h,n} .$$

Comme précédemment on fait apparaître  $Q(y \mathbf{u}_{h,n})$  en développant  $\mathbf{q}_h(y \mathbf{u}_{h,n})$  :

$$\begin{aligned} & h \|\partial_y(y \mathbf{u}_{h,n})\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + Q(y \mathbf{u}_{h,n}) + 2h \langle \partial_y \mathbf{u}_{h,n}, y \mathbf{u}_{h,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \\ & - 2h^{1/2} \langle (z - \xi_0) y^2 \mathbf{u}_{h,n}, y \mathbf{u}_{h,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} + h \|y^2 \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 = \mathbf{s}_n(h) \|y \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 . \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes ingrédients que précédemment, on obtient qu'il existe une constante  $C_6 > 0$  telle que

$$Q(y \mathbf{u}_{h,n}) \leq C_6 h^{1/2} \|\mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2$$

et la proposition est prouvée.  $\square$

**Corollaire 2.34.** *Il existe deux constantes  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  telles que pour  $h \in (0, h_0)$ , on a*

$$\forall v \in \mathfrak{E}_{h,n_0}, \quad \|v - \Pi_0 v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^2)} + \|yv - \Pi_0(yv)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq Ch^{1/8} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} . \quad (2.100)$$

*Preuve :* Supposons que  $w \in L^2(\mathbb{R}) \otimes B^1(\mathbb{R}_+)$  vérifie  $\langle w, u_{\xi_0}^N \rangle_z = 0$ . Alors par le principe du min-max, on a

$$Q(w) \geq (\mu_2^N(\xi_0) - \Theta_0) \|w\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & (\mu_2^N(\xi_0) - \Theta_0) \left( \|v - \Pi_0 v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^2)} + \|yv - \Pi_0(yv)\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \right) \\ & \leq Q(v - \Pi_0 v) + Q(\partial_y(v - \Pi_0 v)) + Q(yv - y\Pi_0 v). \end{aligned} \quad (2.101)$$

On conclut avec les estimations de la proposition 2.33.  $\square$

On notera que l'écart entre les deux premières valeurs propres (aussi appelé “spectral gap”) de l'opérateur modèle  $\mathbf{h}_{\xi_0}^N$  est une hypothèse importante.

**Corollaire 2.35.** *Il existe  $h_0 > 0$  tel que pour  $h \in (0, h_0)$  le projecteur  $\Pi_0$  est un isomorphisme de  $\mathfrak{E}_{h,n_0}$  vers  $\Pi_0(\mathfrak{E}_{h,n_0})$ .*

## Conclusion

Nous pouvons maintenant conclure en remplaçant le potentiel  $\mu_1^N(\xi_0 + yh^{1/2})$  par son approximation. Soit  $v \in \mathfrak{E}_{h,n_0}$ , grâce au corollaire 2.34 nous pourrions dans nos estimations remplacer  $v$  par  $\Pi_0 v$  en effectuant une erreur de l'ordre de  $h^{1/8}$ . On rappelle qu'à partir de (2.85), on a :

$$\langle (h\partial_y^2 + \mu_1^N(\xi_0 + yh^{1/2}) - \Theta_0) v, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} \leq \mathfrak{s}_{n_0}(h) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \quad (2.102)$$

Soit  $\epsilon_0 > 0$ , grâce au corollaire 2.31, on a

$$\int_{|y| \geq \epsilon_0 h^{-1/2}} \left| \left( \mu_1^N(\xi_0 + yh^{1/2}) - \Theta_0 - h \frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2} y^2 \right) v \right|^2 dy dz = O(h^\infty) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2.$$

On se sert d'une formule de Taylor pour le potentiel  $y \mapsto \mu_1^N(\xi_0 + h^{1/2}y)$  : il existe une constante  $C(\epsilon_0) > 0$  telle que

$$\begin{aligned} \int_{|y| \geq \epsilon_0 h^{-1/2}} \left| \left( \mu_1^N(\xi_0 + yh^{1/2}) - \Theta_0 - h \frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2} y^2 \right) v \right|^2 dy dz & \leq C(\epsilon_0) \|y^3 h^{3/2} v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \\ & \leq C_1(\epsilon_0) h^3 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2. \end{aligned}$$

où  $C_1(\epsilon_0) > 0$  est une constante qui vient du corollaire 2.93. Ainsi en utilisant (2.102) on a

$$h \left\langle \left( \partial_y^2 + \frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2} y^2 \right) v, v \right\rangle - C_2 h^{3/2} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \leq \mathfrak{s}_{n_0}(h) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2$$

avec  $C_2 > 0$  une constante. En appliquant le corollaire 2.34, on obtient

$$h \left\langle \left( -\partial_y^2 + \frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2} y^2 \right) \Pi_0 v, \Pi_0 v \right\rangle - C_3 h^{9/8} \|\Pi_0 v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 \leq \mathfrak{s}_{n_0}(h) \|\Pi_0 v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2$$

où  $C_3 > 0$  est une constante. Ainsi on déduit du principe du min-max que

$$(2n_0 - 1)\sqrt{\frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2}}h - Ch^{9/8} \leq \mathfrak{s}_{n_0}(h).$$

La construction des quasi-modes et la majoration (2.26) assuraient que l'opérateur  $\mathfrak{L}_h$  possède au moins  $n_0$  valeurs propres dans l'intervalle  $\left[0, (2n_0 - 1)\left(\frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2}\right)^{1/2}h\right]$  pour  $h$  assez petit. La minoration que nous venons d'obtenir montre qu'il y a exactement  $n_0$  valeurs propres dans cet intervalle pour  $h$  assez proche de 0. Nous rappelons que  $\mathfrak{s}_n(h)$  est la  $n$ -ième valeur propre de  $\mathfrak{L}_h$  et nous déduisons de la proposition 2.25 :

**Proposition 2.36.** *Pour tout  $n_* \geq 1$  et pour tout  $J \geq 1$ , il existe deux constantes  $C_{n_*,J}$  et  $h_0 > 0$  telles que pour tout  $1 \leq n \leq n_*$ , la  $n$ -ième valeur propre de  $\mathfrak{L}_h$  vérifie*

$$|\mathfrak{s}_n(h) - \mathfrak{s}_n^J(h)| \leq C_{n_*,J}h^{J+1},$$

où la quasi-valeur propre  $\mathfrak{s}_n^J(h)$  a été définie en (2.82).

Ainsi les séries formelles construites dans la section précédente fournissent bien les développements asymptotiques des plus petites valeurs propres de  $\mathfrak{L}_h$  quand  $h$  tend vers 0. Puisque ces séries formelles sont distinctes, on obtient que pour  $h$  suffisamment petit, la  $n$ -ième valeur propre est simple. Revenons à l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  : on rappelle la relation entre les spectres des opérateurs  $\mathcal{L}_\theta$  et  $\mathfrak{L}_h$  (voir (2.60)) :

$$\sigma_n(\theta) = \cos \theta (\Theta_0 + \mathfrak{s}_n(\tan \theta)).$$

Ainsi en utilisant les développements en séries de  $\tan \theta$  et  $\cos \theta$ , la proposition 2.36 fournit une suite de réels  $(\beta_{j,n})_j$  telle que

$$\forall J \geq 0, \quad \cos \theta (\Theta_0 + \mathfrak{s}_n^J(\tan \theta)) = \sum_{j=0}^J \beta_{j,n} \theta^j + O(\theta^{J+1}). \quad (2.103)$$

Grâce à (2.82), les réels  $\beta_{j,n}$  se déduisent des  $\gamma_{j,n}$  construits par récurrence, on a en particulier  $\beta_{0,n} = \Theta_0$  et  $\beta_{1,n} = (2n-1)\sqrt{\frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2}}$ . On a donc montré l'asymptotique suivante :

**Théorème 2.37.** *Il existe une suite  $(\beta_{j,n})_{j \geq 0}$  telle que pour tout  $n_* \geq 1$  et  $J \geq 1$  on a une constante  $C_{n_*,J} > 0$  et un angle  $\theta_* > 0$  tels que pour  $1 \leq n \leq n_*$  et  $\theta \in (0, \theta_*)$ ,  $\sigma_n(\theta)$  est une valeur propre simple de  $\mathcal{L}_\theta$ . On a de plus*

$$|\sigma_n(\theta) - \sum_{j=0}^J \beta_{j,n} \theta^j| \leq C_{n_*,J} \theta^{J+1},$$

où les  $(\beta_{j,n})$  se déduisent des  $(\gamma_{j,n})$  à partir de (2.82) et (2.103). Les premiers termes de l'asymptotique sont :

$$\beta_{0,n} = \Theta_0 \quad \text{et} \quad \beta_{1,n} = (2n-1)\sqrt{\frac{(\mu_1^N)''(\xi_0)}{2}}$$

**Remarque 2.38.** On peut déduire du théorème spectral un résultat d’approximation pour les vecteurs propres. Rappelons que nous avons défini  $\mathbf{u}_{h,n}^J$  le  $n$ -ième vecteur propre approché à l’ordre  $J$  pour l’opérateur  $\mathfrak{L}_h$ . Puisque l’écart entre les valeurs propres est de l’ordre de grandeur de  $h$ , on applique le théorème spectral pour les vecteurs propres (voir [VL62]) à partir de l’estimation (2.83) :

$$\|\mathbf{u}_{h,n}^J - \mathbf{u}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)} = O(h^J) ,$$

Notons que cette estimation n’est pas uniforme par rapport à  $J$  ou  $n$ . On a bien sûr un résultat similaire pour les vecteurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  en utilisant le changement de coordonnées (2.9) ainsi que  $h = \tan \theta$ . On remarque que le développement des vecteurs propres de  $\mathcal{L}_\theta$  fait intervenir l’échelle “naturelle”  $\theta^{1/2}$ . Pour des raisons de parité, l’asymptotique des valeurs propres  $\sigma_n(\theta)$  quand  $\theta$  tend vers 0 ne comprend que des puissances entières de  $\theta$ .

## **Deuxième partie**

### **L'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur le dièdre**





## Chapitre 3

### Réduction du dièdre au secteur

Nous nous intéressons à la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant unitaire dans un dièdre infini. Dans la section 3.1, nous discutons du choix du potentiel magnétique associé au champ magnétique et nous montrons que le problème se ramène à une famille d'opérateurs sur un secteur. Dans la section 3.2 nous présentons un opérateur modèle qui correspond à la situation particulière où le champ magnétique est parallèle à l'arête du dièdre. Dans la section 3.3, nous étudions la dépendance du spectre de l'opérateur sur le dièdre par rapport à la géométrie du problème, c'est-à-dire par rapport à la direction du champ magnétique et à l'angle d'ouverture du dièdre. Nous montrons en particulier des propriétés de symétrie et de continuité. Finalement, nous montrons dans la section 3.4 des estimations sur le bas du spectre de l'opérateur.

Nous ne considérerons que des domaines convexes. Pour  $\alpha \in (0, \pi)$  nous définissons le dièdre infini d'angle  $\alpha$  comme le domaine

$$\mathcal{D}_\alpha := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 > 0, |x_2| < x_1 \tan \frac{\alpha}{2}\}.$$

Nous étendons cette définition en posant  $\mathcal{D}_\pi$  pour le demi-espace d'équation  $\{x_1 > 0\}$ . Nous supposons que le dièdre est plongé dans un champ magnétique constant unitaire

$$\mathbf{B} := (b_1, b_2, b_3).$$

Lorsque nous étudierons l'influence de la direction du champ magnétique, il sera pertinent d'utiliser les coordonnées sphériques :

$$\mathbf{B} = (\sin \theta \sin \gamma, \cos \theta \sin \gamma, \cos \gamma) \quad (3.1)$$

avec  $\theta \in [0, 2\pi)$  et  $\gamma \in [0, \pi]$  (voir la figure 3.1). Nous cherchons un potentiel magnétique  $\mathbf{A}$  vérifiant  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . En notant  $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ , on cherche donc une solution au système suivant :

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} : \begin{cases} \partial_{x_2} a_3 - \partial_{x_3} a_2 = b_1, \\ -\partial_{x_1} a_3 + \partial_{x_3} a_1 = b_2, \\ \partial_{x_1} a_2 - \partial_{x_2} a_1 = b_3. \end{cases}$$

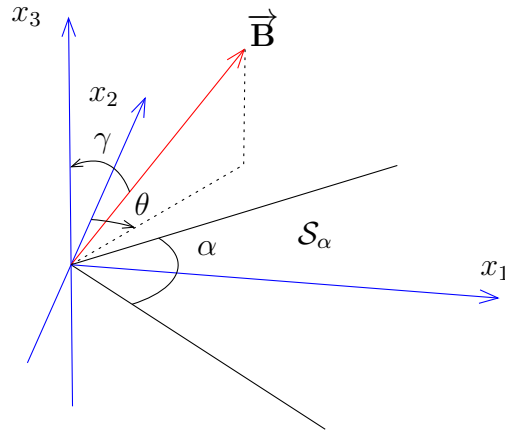


FIGURE 3.1 – Le dièdre infini d’ouverture  $\alpha$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  de coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta)$ .

Puisque le dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  est invariant par translation selon l’axe  $\{x_3\}$ , il est naturel de chercher une solution particulière de ce système sous la forme d’un potentiel magnétique qui ne dépend pas de  $x_3$ . Nous sommes donc amenés à résoudre le système

$$\begin{cases} \partial_{x_2} a_3 = b_1, & (3.2a) \\ -\partial_{x_1} a_3 = b_2, & (3.2b) \\ \partial_{x_1} a_2 - \partial_{x_2} a_1 = b_3. & (3.2c) \end{cases}$$

Grâce aux équations (3.2a) et (3.2b), nous voyons qu’une solution particulière pour la troisième coordonnée de  $\mathbf{A}$  est donnée par

$$a_3(x_1, x_2) = x_2 b_1 - x_1 b_2. \quad (3.3)$$

Une solution qui vérifie (3.2c) est donnée par

$$\begin{cases} a_1(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{2} b_3, \\ a_2(x_1, x_2) = \frac{x_1}{2} b_3. \end{cases}$$

Nous avons donc trouvé un potentiel magnétique qui est une solution particulière de  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , que nous notons  $\mathbf{A}^S$  :

$$\mathbf{A}^S(x_1, x_2, x_3) := \left( -\frac{x_2}{2} b_3, \frac{x_1}{2} b_3, x_2 b_1 - x_1 b_2 \right). \quad (3.4)$$

Nous pouvons définir l’opérateur de Schrödinger magnétique avec condition de Neumann (cf (B.2)) :

$$P_{\mathbf{A}^S, \mathcal{D}_\alpha} := -(\nabla - i\mathbf{A}^S)^2$$

dont le domaine  $\text{Dom}(P_{\mathbf{A}^S, \mathcal{D}_\alpha})$  est défini en (B.3). On introduit la notation suivante pour le bas de son spectre :

**Définition 3.1.** Pour un champ magnétique  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$  donné, on définit

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \inf \mathfrak{S} (P_{\mathbf{A}^S, \mathcal{D}_\alpha})$$

où  $\mathbf{A}^S$  est fourni par (3.4).

Notons que pour un champ magnétique  $\mathbf{B}$  constant unitaire donné, il n’y a pas unicité de la solution pour le problème énoncé en (3.2c), (3.2a) et (3.2b) : nous donnerons dans la suite des solutions explicites différentes de  $\mathbf{A}^S$ . Nous introduisons la classe des potentiels magnétiques que nous allons utiliser :

**Définition 3.2.** Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant unitaire. On note  $\mathcal{A}(\mathbf{B})$  l’ensemble des fonctions de  $\mathcal{D}_\alpha$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} , \\ \mathbf{A} \text{ est invariant par translation selon l'axe } \{x_3\} , \\ \mathbf{A} \text{ est linéaire} . \end{array} \right. \quad (3.5a)$$

$$\quad (3.5b)$$

$$\quad (3.5c)$$

L’ensemble  $\mathcal{A}(\mathbf{B})$  est appelé la classe des potentiels magnétiques associée au champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Un représentant  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B})$  de cette classe sera appelé un potentiel magnétique associé au champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Pour un tel potentiel magnétique, nous définissons  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  la réalisation de Neumann de l’opérateur de Schrödinger avec champ magnétique. On remarque que  $\mathbf{A}^S \in \mathcal{A}(\mathbf{B})$ , ainsi on a  $\text{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^S) = \mathbf{0}$  sur  $\mathcal{D}_\alpha$ . Puisque l’ouvert  $\mathcal{D}_\alpha$  est simplement connexe, on sait que  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}^S$  diffèrent d’un gradient au sens suivant :

$$\exists \phi \in L^2_{\text{loc}}(\mathcal{D}_\alpha), \quad \mathbf{A} - \mathbf{A}^S = \nabla \phi .$$

Puisqu’on a supposé que les éléments de la classe  $\mathcal{A}(\mathbf{B})$  sont linéaires, on déduit que  $\phi$  est quadratique. La fonction  $\phi$  est appelée la “jauge” du potentiel  $\mathbf{A}$  par rapport au potentiel  $\mathbf{A}^S$ . On obtient grâce à la proposition B.2 sur le changement de jauge :

**Proposition 3.3.** Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant unitaire. La famille  $(P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha})_{\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B})}$  forme une famille d’opérateurs deux à deux unitairement équivalents. Le spectre de  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  ne dépend que du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et de l’ouvert  $\mathcal{D}_\alpha$ . On a en particulier :

$$\forall \mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B}), \quad \inf \mathfrak{S} (P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}) = s(\mathbf{B}; \alpha) . \quad (3.6)$$

Lorsque nous souhaiterons étudier la dépendance du bas du spectre par rapport aux coordonnées sphériques du champ  $\mathbf{B}$  (voir (3.1)), nous noterons aussi

$$s(\gamma, \theta; \alpha) := s(\mathbf{B}; \alpha) . \quad (3.7)$$

Nous allons démontrer un résultat typique des opérateurs sur un domaine invariant par translation : le spectre discret de l’opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  est vide. On commence par un lemme classique :

**Lemme 3.4.** Soit  $T_a$  l'opérateur de translation dans la direction  $x_3$  :

$$T_a u(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2, x_3 - a) .$$

Soit  $F$  un espace vectoriel de dimension finie composé de fonctions continues par rapport à la variable  $x_3$ . On suppose que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad T_a(F) \subset F .$$

Alors les éléments de  $F$  sont réguliers et sont solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

On peut maintenant énoncer le résultat sur la nature du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  :

**Proposition 3.5.** On a

$$\mathfrak{S}(P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}) = \mathfrak{S}_{\text{ess}}(P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha})$$

et  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  ne peut pas correspondre à une valeur propre isolée pour  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$ .

*Preuve :* Supposons que le bas du spectre ne corresponde pas à du spectre essentiel. Il s'agit alors d'une valeur propre de multiplicité finie et il existe un vecteur propre associé dans le domaine de l'opérateur que nous notons  $u$ . Puisque le dièdre est invariant selon  $x_3$ , il est clair que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , la fonction définie sur  $\mathcal{D}_\alpha$  par

$$u_a : (x_1, x_2, x_3) \mapsto u(x_1, x_2, x_3 - a)$$

est encore dans le domaine de l'opérateur. De plus, comme  $\mathbf{A}$  ne dépend pas de  $x_3$ , la fonction  $u_a$  est encore un vecteur propre de  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  associé à la même valeur propre. L'espace propre associé est donc stable par translation selon la direction  $x_3$ . Le dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  est convexe, donc d'après la proposition A.4, les fonctions propres sont continues, ainsi les fonctions propres sont continues par rapport à la variable  $x_3$ . On utilise le lemme 3.4 : les fonctions propres sont solutions d'une équation différentielle (par rapport à la variable  $x_3$ ) linéaire à coefficients constants. Ils ne sont donc pas dans  $L^2(\mathcal{D}_\alpha)$ , ce qui est une contradiction puisque les vecteurs propres doivent être dans le domaine de l'opérateur.  $\square$

## 3.1 Réduction de la dimension

### 3.1.1 Choix du potentiel magnétique

Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant unitaire. Nous décrivons les potentiels magnétiques  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B})$ . L'hypothèse (3.5b) traduit le fait que le potentiel magnétique  $\mathbf{A}$  ne dépend pas de  $x_3$ . Nous définissons le secteur infini d'angle  $\alpha \in (0, \pi]$  comme l'intersection de  $\mathcal{D}_\alpha$  et du plan  $\{x_3 = 0\}$  :

$$\mathcal{S}_\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0, |x_2| \leq x_1 \tan \frac{\alpha}{2}\} . \quad (3.8)$$

Ainsi un potentiel magnétique  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B})$  peut être vu comme une fonction linéaire définie sur  $\mathcal{S}_\alpha$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous notons génériquement  $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ . Grâce aux équations (3.2a) et (3.2b), nous fixons la troisième coordonnée de  $\mathbf{A}$  en prenant

$$a_3(x_1, x_2) = x_2 b_1 - x_1 b_2 . \quad (3.9)$$

Nous reconnaissons en (3.2c) un rotationnel en dimension 2 que nous définissons naturellement :

**Définition 3.6.** Pour une fonction  $\underline{\mathbf{A}} := (a_1, a_2)$  définie sur  $\mathcal{S}_\alpha$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , on définit

$$\text{rot } \underline{\mathbf{A}} = \partial_{x_1} a_2 - \partial_{x_2} a_1$$

son rotationnel en dimension 2.

Nous introduisons une nouvelle classe de fonctions définies sur le secteur :

**Définition 3.7.** Etant donné un scalaire  $b_3$ , on définit  $\underline{\mathcal{A}}(b_3)$  comme l'ensemble des fonctions  $\underline{\mathbf{A}} : \mathcal{S}_\alpha \mapsto \mathbb{R}^2$  vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{\mathbf{A}} = b_3 , \\ \underline{\mathbf{A}} \text{ est linéaire} . \end{cases} \quad (3.10a)$$

$$(3.10b)$$

Un tel  $\underline{\mathbf{A}}$  est appelé “potentiel magnétique plan” associé au scalaire  $b_3$ . Lorsqu’il n’y aura pas d’ambiguïté sur le nombre de composantes du potentiel, nous appellerons encore  $\underline{\mathbf{A}}$  “potentiel magnétique”.

La proposition suivante fait le lien entre cette définition et la définition 3.2 :

**Proposition 3.8.** Soit  $\mathbf{B} := (b_1, b_2, b_3)$  un champ magnétique constant unitaire. Soit  $a_3 : \mathcal{S}_\alpha \mapsto \mathbb{R}$  la fonction définie par  $a_3(x_1, x_2) = x_2 b_1 - x_1 b_2$ . Soit  $\underline{\mathbf{A}} : \mathcal{S}_\alpha \mapsto \mathbb{R}^2$  une fonction définie sur le secteur. Alors  $\underline{\mathbf{A}} \in \underline{\mathcal{A}}(b_3)$  si et seulement si la fonction  $\mathbf{A} := (\underline{\mathbf{A}}, a_3)$  est dans la classe  $\mathcal{A}(\mathbf{B})$ .

Ainsi une fois le potentiel magnétique plan  $\underline{\mathbf{A}} \in \underline{\mathcal{A}}(b_3)$  choisi, on déduit le potentiel magnétique  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B})$  à partir de la relation

$$\mathbf{A} = (\underline{\mathbf{A}}, a_3) \quad (3.11)$$

avec  $a_3$  défini en (3.9). On a donc  $\underline{\mathbf{A}}^S(x_1, x_2) = (-\frac{x_2}{2}b_3, \frac{x_1}{2}b_3)$  et  $\underline{\mathbf{A}}^S \in \underline{\mathcal{A}}(b_3)$ . Comme pour un potentiel magnétique en dimension 3, deux potentiels magnétiques plans qui sont dans la classe  $\underline{\mathcal{A}}(b_3)$  diffèrent d’un gradient :

$$\forall \underline{\mathbf{A}} \in \underline{\mathcal{A}}(b_3), \exists \phi \in L^2_{\text{loc}}(\mathcal{S}_\alpha), \quad \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^S + \nabla \phi .$$

On étend  $\phi$  en une fonction définie sur le dièdre en posant  $\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi(x_1, x_2) \otimes \text{Id}(x_3)$ . On a alors d’après (3.11)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \nabla \phi .$$

Nous citons maintenant trois choix particuliers de potentiels magnétiques plans dans la classe  $\underline{\mathcal{A}}(b_3)$ . Les potentiels magnétiques dans la classe  $\mathcal{A}(\mathbf{B})$  correspondants se déduisent grâce à (3.11). Nous explicitons aussi les opérateurs de Schrödinger associés :

- Le potentiel appelé “potentiel symétrique” a déjà été présenté : il s’agit de  $\underline{\mathbf{A}}^S(x_1, x_2) = (-\frac{x_2}{2}b_3, \frac{x_1}{2}b_3)$ . L’opérateur associé est

$$P_{\mathbf{A}^S, \mathcal{D}_\alpha} = \left(D_{x_1} + \frac{x_2}{2}b_3\right)^2 + \left(D_{x_2} - \frac{x_1}{2}b_3\right)^2 + (D_{x_3} + x_1b_2 - x_2b_1)^2 .$$

- Le potentiel de Landau :  $\underline{\mathbf{A}}^L(x_1, x_2) = (0, x_1b_3)$ . L’opérateur associé est

$$P_{\mathbf{A}^L, \mathcal{D}_\alpha} = D_{x_1}^2 + (D_{x_2} - x_1b_3)^2 + (D_{x_3} + x_1b_2 - x_2b_1)^2 .$$

- Le potentiel  $\underline{\mathbf{A}}^R(x_1, x_2) = (-x_2b_3, 0)$  et l’opérateur associé :

$$P_{\mathbf{A}^R, \mathcal{D}_\alpha} = (D_{x_1} + x_2b_3)^2 + D_{x_2}^2 + (D_{x_3} + x_1b_2 - x_2b_1)^2 .$$

Les trois opérateurs cités sont unitairement équivalents d’après la proposition B.2. Nous explicitons la jauge qui permet de passer d’un potentiel magnétique à l’autre pour les exemples cités ci-dessus : on a  $\underline{\mathbf{A}}^L - \underline{\mathbf{A}}^S = \nabla \underline{\phi}^L$  avec

$$\underline{\phi}^L(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2b_3 .$$

De même on trouve que  $\underline{\mathbf{A}}^R - \underline{\mathbf{A}}^S = \nabla \underline{\phi}^R$  avec

$$\underline{\phi}^R(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1x_2b_3 .$$

### 3.1.2 Réduction à un problème sur un secteur

Nous supposons désormais que  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B})$  s’écrit

$$\mathbf{A}(x_1, x_2) = (\underline{\mathbf{A}}(x_1, x_2), x_2b_1 - x_1b_2)$$

avec  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(b_3)$  (nous avons donné ci-dessus trois exemples pour un tel potentiel magnétique). Nous réalisons une transformée de Fourier partielle par rapport à la variable  $x_3$  :

$$P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha} = \int_{\tau \in \mathbb{R}}^{\oplus} P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + (\tau - (x_2b_1 - x_1b_2))^2 d\tau . \quad (3.12)$$

Nous voyons apparaître le potentiel  $(x_1b_2 - x_2b_1 + \tau)^2$ . Nous rappelons que dans le chapitre 1, nous avons étudié l’opérateur  $-\partial_t^2 + (t - \tau)^2$  pour  $t > 0$ . Ainsi afin de garder la même convention sur le paramètre de Fourier que dans les chapitres précédents, nous réalisons le changement de variable  $\tau \rightarrow -\tau$  dans (3.12). Nous introduisons  $\underline{\mathbf{B}} := (b_1, b_2)$  la projection du champ magnétique sur le plan  $\{x_3 = 0\}$ . En définissant le potentiel électrique

$$V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}(x_1, x_2) := (x_1b_2 - x_2b_1 - \tau)^2 , \quad (3.13)$$

on a donc

$$P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha} = \int_{\tau \in \mathbb{R}}^{\oplus} (P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}) d\tau \quad (3.14)$$

où l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est la réalisation de Neumann de  $(-i\nabla - \underline{\mathbf{A}})^2 + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  sur le secteur  $S_\alpha$ . Il s'agit d'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel magnétique plan  $\underline{\mathbf{A}}$  et un potentiel électrique  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . Ce type d'opérateur a été introduit dans la section B.2.

Pour le choix du potentiel magnétique  $\underline{\mathbf{A}}^S(x_1, x_2) = (-\frac{x_2}{2}b_3, \frac{x_1}{2}b_3)$  qui appartient bien à la classe  $\mathcal{A}(b_3)$ , on peut définir

$$\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) := \inf \mathfrak{S} (P_{\underline{\mathbf{A}}^S, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}) .$$

D'après la proposition B.2 sur les changements de jauge, les opérateurs  $(P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau})_{\underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(b_3)}$  forment une famille d'opérateurs unitairement équivalents deux à deux. Ainsi le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique  $\underline{\mathbf{A}}$  et potentiel électrique  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  sur le secteur  $S_\alpha$  ne dépend que de l'orientation du champ magnétique  $\mathbf{B}$ , de l'angle  $\alpha$  et de la valeur du paramètre de Fourier  $\tau$ . On a donc :

$$\forall \underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(b_3), \quad \inf \mathfrak{S} (P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}) = \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) . \quad (3.15)$$

Nous rappelons que  $(\gamma, \theta)$  sont les coordonnées sphériques du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et nous définissons

$$V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1, x_2) := (x_1 \cos \theta \sin \gamma - x_2 \sin \theta \sin \gamma - \tau)^2 . \quad (3.16)$$

D'après la définition (3.13) on a bien  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = V_{\gamma, \theta, \tau}$ .

**Remarque 3.9.** Si  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire si le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est orthogonal à l'arête du dièdre, on a  $V_{\frac{\pi}{2}, \theta, \tau} = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta - \tau)^2$ . L'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est alors l'opérateur  $-\Delta + (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta - \tau)^2$  sur le secteur  $S_\alpha$  avec condition de Neumann sur le bord.

Lorsqu'il sera pertinent de représenter le champ magnétique  $\mathbf{B}$  par ses coordonnées sphériques, nous noterons

$$\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) := \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) . \quad (3.17)$$

D'après (3.14), on a une relation importante entre le problème spectral sur le dièdre et celui sur le secteur :

**Proposition 3.10.** *Pour tout champ magnétique  $\mathbf{B}$  constant unitaire, on a*

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) , \quad (3.18)$$

*soit en coordonnées sphériques :*

$$s(\gamma, \theta; \alpha) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) . \quad (3.19)$$

**Remarque 3.11.** On voit là un principe général des opérateurs de Schrödinger magnétiques que nous avons déjà vu dans les chapitres précédents : on trouve un lien entre le bas du spectre de l'opérateur et l'infimum des spectres d'une famille d'opérateurs dans un espace de dimension inférieure.



Il sera intéressant de savoir si la valeur  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  correspond à du spectre discret pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . Ainsi nous définissons

$$\underline{s}_{\text{ess}}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) := \inf \mathfrak{S}_{\text{ess}}(P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}) \quad (3.20)$$

le bas du spectre essentiel de l'opérateur défini sur le secteur. Nous notons encore en coordonnées sphériques

$$\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) = \underline{s}_{\text{ess}}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) .$$

Il est à noter que cette quantité n'a *a priori* pas de lien direct avec le spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$ .

## 3.2 Cas particulier d'un champ tangent à l'arête

Nous décrivons ici les résultats connus lorsque le champ magnétique a comme coordonnées cartésiennes  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$  : il est tangent à l'arête du dièdre. La coordonnée sphérique  $\gamma$  vaut alors 0 et la coordonnée  $\theta$  n'est pas définie. Le potentiel magnétique en dimension 3 est alors  $\mathbf{A} = (\underline{\mathbf{A}}, 0)$  avec  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(1)$  et le potentiel électrique est constant :  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = \tau^2$ . L'opérateur de Schrödinger sur le secteur  $S_\alpha$  est

$$P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + \tau^2 , \quad (3.21)$$

Nous notons

$$\mu(\alpha) := \inf \mathfrak{S}(P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha}) .$$

de sorte que  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) = \mu(\alpha) + \tau^2$ . Ainsi d'après (3.18) on a

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \mu(\alpha)$$

et pour étudier le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$ , il suffit d'étudier le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha}$ .

**Remarque 3.12.** L'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha}$  avec  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(1)$  sera considéré comme un opérateur modèle pour étudier l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  dans le cas général  $\underline{\mathbf{B}} \neq (0, 0)$ , c'est-à-dire lorsque  $\mathbf{B} \neq (0, 0, 1)$ .

L'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha}$  avec  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(1)$  a été étudié dans [Bon03a]. Le bas du spectre essentiel de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha}$  vaut  $\Theta_0$  (voir [Bon05]) et donc

$$\forall \alpha \in (0, \pi], \quad \mu(\alpha) \leq \Theta_0 . \quad (3.22)$$

Il est démontré dans [Jad01b] et [Pan02] que  $\mu(\frac{\pi}{2}) < \Theta_0$ . On trouve dans [Bon05] l'estimation suivante :

$$\forall \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}], \quad \mu(\alpha) \leq \frac{\Theta_0}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{4 \sin \alpha} u_{\xi_0}^N(0)^4 . \quad (3.23)$$

On a donc que  $\mu(\alpha)$  est une valeur propre de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha}$  pour  $\alpha \in (\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$  avec

$$\alpha_0 := \frac{\pi}{2} - 2 \arctan\left(\frac{u_{\xi_0}^N(0)^4}{4\Theta_0}\right) .$$

A l'aide d'estimations sur  $\Theta_0$  et  $u_{\xi_0}^N(0)$  (voir par exemple [BN12]), on trouve  $\alpha_0 \simeq 1.09$ .

L'étude d'un opérateur unidimensionnel fournit dans [Bon05] le quasi-mode suivant :

$$u_1(\rho, \phi) = e^{-i\frac{\phi\rho^2}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha\rho^2}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)\right)$$

où  $(\rho, \phi)$  sont les coordonnées polaires associées à  $(x_1, x_2)$ . Ce quasi-mode fournit la majoration :

$$\mu(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \quad (3.24)$$

Dans [Bon05, proposition 4.2], cette construction de quasi-mode est améliorée et permet d'obtenir :

$$\forall \alpha \in (0, \pi], \quad \mu(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3 + \alpha^2}}, \quad (3.25)$$

La majoration (3.22) est donc stricte pour des valeurs de  $\alpha$  suffisamment petites. En

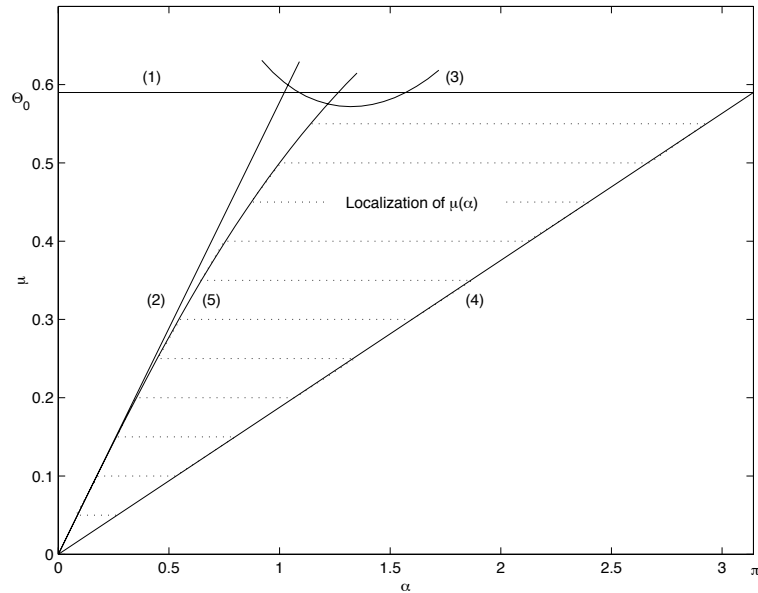


FIGURE 3.2 – Localisation de  $\mu(\alpha)$ . Les courbes (1), (2), (3), (4) et (5) correspondent respectivement aux estimations (3.22), (3.24), (3.25), (3.23) et (3.27). Ce graphe est issu de [Bon03b].

utilisant ces deux majorations, on démontre que  $\mu(\alpha) < \Theta_0$  pour  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ . Bien que des calculs numériques le laissent penser (voir [ABN06] et [BNDMV07]), ce fait n'est pas démontré en général pour  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

Des estimations d'Agmon basées sur la connaissance du spectre essentiel permettent de montrer que les vecteurs propres associés sont concentrés dans le coin du secteur et décroissent exponentiellement vite à l'infini. Plus précisément on suppose que  $\mu(\alpha) < \Theta_0$

et on note  $U_\alpha$  un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre  $\mu(\alpha)$ . Soit  $\epsilon \in (0, \Theta_0 - \mu(\alpha))$ . On définit la fonction

$$\phi(x_1, x_2) = \sqrt{\Theta_0 - \mu(\alpha) - \epsilon} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha.$$

On trouve alors dans [Bon05] l'estimation suivante : il existe une constante  $C_{\epsilon, \alpha}$  telle que

$$\|e^\phi U_\alpha\|_{H_{\mathbb{A}}^1(\mathcal{S}_\alpha)} \leq C_{\epsilon, \alpha}. \quad (3.26)$$

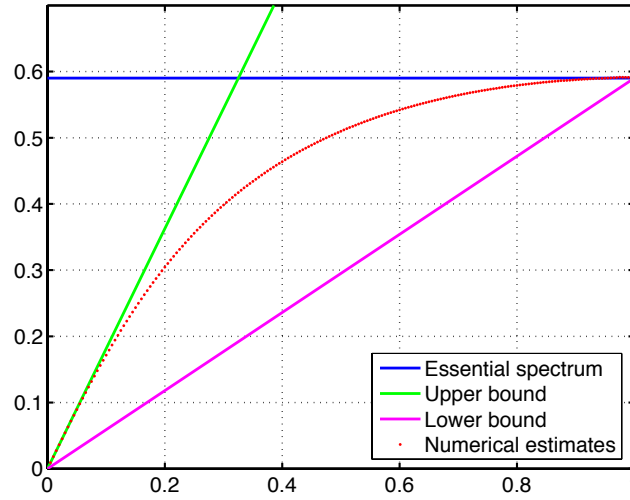


FIGURE 3.3 – Illustration de  $\mu(\alpha)$  grâce à un calcul par éléments finis issu de [BNDMV07]. On a aussi représenté les encadrants des estimations (3.22), (3.24) et (3.27).

Quand l'angle d'ouverture du secteur tend vers 0, on trouve dans [Bon05] l'asymptotique “petits angles” suivante :

$$\mu(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

et pour  $\alpha$  assez petit, cette valeur propre est simple. Dans [Bon05], une construction de quasi-modes fournit un développement asymptotique de la plus petite valeur propre à tout ordre en puissances impaires de  $\alpha$ .

Il est démontré que les fonctions  $\alpha \mapsto \alpha\mu(\alpha)$  et  $\alpha \mapsto \mu(\alpha)/\alpha$  sont respectivement croissante et décroissante. En utilisant le fait que  $\mu(\pi) = \Theta_0$ , on a ainsi une minoration :

$$\forall \theta \in (0, \pi], \quad \Theta_0 \frac{\alpha}{\pi} \leq \mu(\alpha). \quad (3.27)$$

Des simulations numériques issues de [ABN06] et [BNDMV07] laissent penser que  $\alpha \mapsto \mu(\alpha)$  est croissante sur  $(0, \pi)$ , mais ce résultat n'est pas démontré.

**Remarque 3.13.** D'après (3.21), pour ce cas modèle le minimum en  $\tau$  du bas du spectre de la famille d'opérateurs à paramètre sur le secteur  $(P_{\underline{A}, S_\alpha} + V_{\underline{B}, \tau})_{\tau \in \mathbb{R}}$  est atteint pour  $\tau = 0$ , ainsi le bas du spectre de l'opérateur sur le dièdre se déduit directement de l'étude d'un opérateur de Schrödinger magnétique sans potentiel électrique sur le secteur. Nous allons voir que lorsque  $\gamma \neq 0$ , c'est-à-dire lorsque le champ magnétique  $\mathbf{B}$  n'est pas parallèle à l'arête du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ , l'influence du paramètre de Fourier  $\tau$  sur le spectre de l'opérateur  $P_{\underline{A}, S_\alpha} + V_{\underline{B}, \tau}$  rajoute une difficulté supplémentaire par rapport au cas  $\gamma = 0$ , et il faudra étudier une famille d'opérateurs de Schrödinger magnétique sur le secteur avec un potentiel électrique qui dépend d'un paramètre. Sauf mention explicite, nous supposons que  $\gamma \neq 0$  dans la suite, c'est-à-dire que le champ magnétique n'est pas tangent à l'arête du dièdre.

### 3.3 Cas d'un champ non tangent à l'arête

Nous rappelons que nous notons  $(\gamma, \theta)$  les coordonnées sphériques du champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Dans cette section nous supposons que  $\gamma \neq 0$ , c'est-à-dire que le champ magnétique n'est pas tangent à l'arête du dièdre (voir figure 3.1).

#### 3.3.1 Réduction du domaine d'étude

On rappelle que l'on note  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$ . Nous montrons que nous pouvons nous ramener au cas où les  $b_i$  sont tous positifs.

**Proposition 3.14.** Soit  $\varepsilon \in \{-1, 1\}^3$  et soit  $\mathbf{B}_\varepsilon$  le champ magnétique de coordonnées  $(\varepsilon_i b_i)_i$ . Alors la réunion des familles  $(P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha})_{\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B})}$  et  $(P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha})_{\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B}_\varepsilon)}$  forme une collection d'opérateurs deux à deux unitairement équivalents.

*Preuve :*

- Si  $\varepsilon = (-1, -1, -1)$ , on a  $\mathbf{B}_\varepsilon = -\mathbf{B}$ . Soit  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B})$ , alors on a  $-\mathbf{A} \in \mathcal{A}(-\mathbf{B})$ . La proposition B.5 montre que  $P_{\mathbf{A}, S_\alpha}$  et  $P_{-\mathbf{A}, S_\alpha}$  sont unitairement équivalents.
- Si  $\varepsilon = (1, 1, -1)$ , on a  $\mathbf{B}_\varepsilon = (b_1, b_2, -b_3)$ . Soit  $\mathbf{A}_\varepsilon^L$  le potentiel de Landau associé dans  $\mathcal{A}(\mathbf{B}_\varepsilon)$ . L'opérateur s'écrit :

$$P_{\mathbf{A}_\varepsilon^L, \mathcal{D}_\alpha} = D_{x_1}^2 + (D_{x_2} + x_1 b_3)^2 + (D_{x_3} - x_2 b_1 + x_1 b_2)^2.$$

On réalise la symétrie  $X_3 = -x_3$  qui laisse bien le dièdre invariant et nous donne l'opérateur unitairement équivalent :

$$D_{x_1}^2 + (D_{x_2} + x_1 b_3)^2 + (-D_{X_3} - x_2 b_1 + x_1 b_2)^2.$$

D'après le premier point, on peut alors changer  $(b_1, b_2, -b_3)$  en  $(-b_1, -b_2, b_3)$  et on obtient un nouvel opérateur unitairement équivalent :

$$D_{x_1}^2 + (D_{x_2} - x_1 b_3)^2 + (-D_{X_3} + x_2 b_1 - x_1 b_2)^2,$$

En utilisant  $(-D_{X_3} + x_2 b_1 - x_1 b_2)^2 = (D_{X_3} - x_2 b_1 + x_1 b_2)^2$ , on reconnaît  $P_{\mathbf{A}^L, \mathcal{D}_\alpha}$  avec  $\mathbf{A}^L \in \mathcal{A}(\mathbf{B})$ .

- Si  $\varepsilon = (1, 1, -1)$ , on fait le même raisonnement avec la symétrie  $X_2 = -x_2$  qui laisse elle aussi le dièdre invariant.

Puisque ces trois permutations engendrent  $\{-1, 1\}^3$ , la proposition est montrée.  $\square$

On peut donc restreindre l'étude de l'opérateur de Schrödinger magnétique avec champ constant sur le dièdre au cas où les coordonnées du champ magnétique  $\mathbf{B}$  sont toutes positives, c'est-à-dire au cas  $(\gamma, \theta) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$  où  $(\gamma, \theta)$  sont les coordonnées sphériques du champ magnétique.

**Dans toute la suite, on suppose que  $(\gamma, \theta) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ .**

### 3.3.2 Des conditions géométriques

Nous définissons maintenant des conditions géométriques qui joueront un rôle discriminant dans notre étude. L'opérateur  $P_{\underline{A}, S_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$  est un opérateur de Schrödinger avec un potentiel électrique régulier positif  $V_{\gamma, \theta, \tau}$ , cf (3.16). Nous avons vu dans les chapitres précédents que la zone d'annulation du potentiel jouait un rôle clef pour étudier les paires propres d'un opérateur de Schrödinger. Ici le potentiel s'annule sur la droite

$$\Upsilon := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \cos \theta \sin \gamma - x_2 \sin \theta \sin \gamma - \tau = 0\}. \quad (3.28)$$

Cette droite fait l'angle  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  avec l'axe  $\{x_2\}$ . Le potentiel  $V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1, x_2)$  vaut le carré de la distance du point  $(x_1, x_2)$  à la droite  $\Upsilon$ . Nous définissons trois configurations pour cette droite  $\Upsilon$  :

**Définition 3.15** (Condition de la droite sortante). *On appelle condition de la droite sortante la condition*

$$0 \leq \theta < \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

*Cette situation est représentée sur la figure 3.4. On dit que la droite  $\Upsilon$  sort du secteur  $S_\alpha$  ou que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  sort du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

**Définition 3.16** (Condition de la droite tangente). *On appelle condition de la droite tangente la condition*

$$\theta = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

*La droite  $\Upsilon$  est alors parallèle au bord supérieur du secteur  $S_\alpha$ . Cette situation est représentée sur la figure 3.5. On dit alors que le champ magnétique est tangent au dièdre : cette situation correspond à un champ magnétique qui est contenu dans une des faces du dièdre.*

**Définition 3.17** (Condition de la droite entrante). *On appelle condition de la droite entrante la condition*

$$\frac{\pi - \alpha}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

*Cette situation est représentée sur la figure 3.6, on dit que la droite  $\Upsilon$  entre dans le secteur  $S_\alpha$  ou que le champ magnétique entre dans le dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ .*

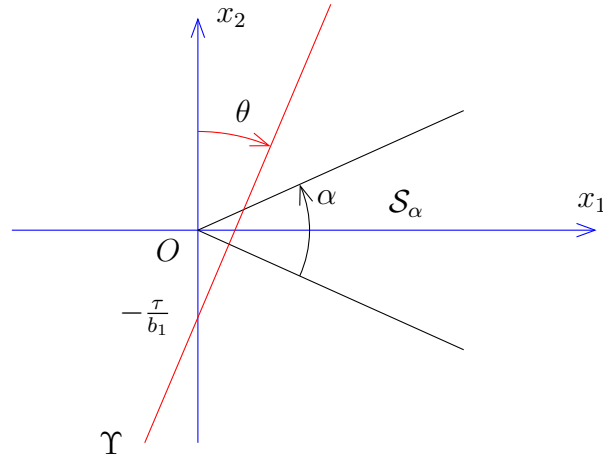


FIGURE 3.4 – La direction de la droite  $\Upsilon$  est donnée par la projection du champ magnétique  $\mathbf{B}$  sur le plan  $\{x_3 = 0\}$ . Cette droite fait l'angle  $\theta$  avec l'axe  $\{x_2\}$ . Ici la droite est dite sortante :  $0 \leq \theta < \frac{\pi-\alpha}{2}$ .

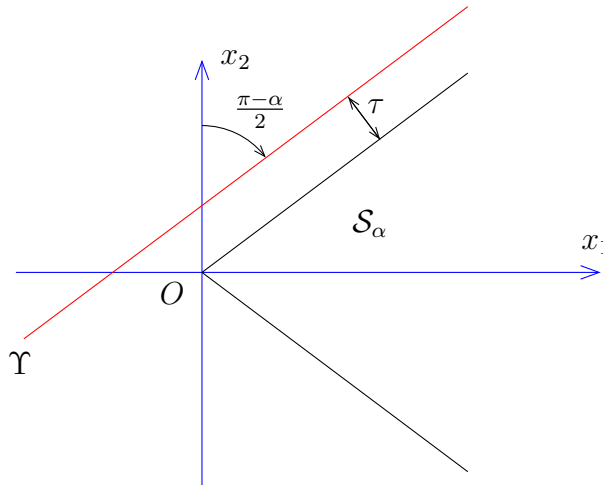


FIGURE 3.5 – Condition de la droite tangente : la droite  $\Upsilon$  est parallèle au bord supérieur du secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  et on a  $\theta = \frac{\pi-\alpha}{2}$ . Cette situation correspond à un champ magnétique  $\mathbf{B}$  contenu dans une des faces du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ .

On fait le raisonnement heuristique que le potentiel confine les vecteurs propres dans sa vallée d'annulation et on décrit l'intersection entre la droite  $\Upsilon$  et le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  selon les valeurs du paramètre de Fourier  $\tau$  :

- Cas sortant : l'ensemble  $\Upsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$  est vide si  $\tau < 0$  et il s'agit d'un intervalle borné si  $\tau \geq 0$ . Dans le second cas, on s'attend à une situation proche de celle d'un opérateur de Schrödinger sur un domaine borné.
- Cas tangent : l'ensemble  $\Upsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$  est vide si  $\tau \leq 0$  et il s'agit d'une demi-droite contenue dans le secteur si  $\tau > 0$ .
- Cas entrant : l'intersection  $\Upsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$  est toujours une demi-droite contenue dans le

Coordonnées sphériques de $\mathbf{B}$	Position de $\mathbf{B}$ par rapport à $\mathcal{D}_\alpha$	Remarque particulière
$\gamma = 0$	Tangent à l'arête du dièdre	La droite $\Upsilon$ n'est pas définie et $s(\mathbf{B}; \alpha) = \mu(\alpha)$
$\gamma = \frac{\pi}{2}$	Perpendiculaire à l'arête du dièdre	$\underline{\mathbf{A}} = 0$ et l'opérateur $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ est réel
$\theta = \frac{\pi}{2}$	Contenu dans le plan bissecteur du dièdre	La droite $\Upsilon$ est toujours entrante
$\theta = \frac{\pi - \alpha}{2}$	Contenu dans une des faces du dièdre	La droite $\Upsilon$ est tangente

TABLE 3.1 – Description du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et de la position de la droite  $\Upsilon$  selon les coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta)$  pour quelques cas particuliers.

secteur. On a une ligne d'annulation du potentiel contenue dans  $\mathcal{S}_\alpha$ . On s'attend alors à un comportement similaire à celui décrit dans le chapitre 2 pour l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$ .

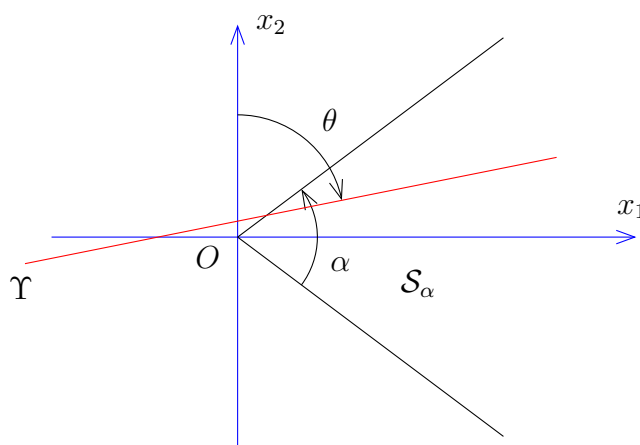


FIGURE 3.6 – La droite  $\Upsilon$  entre dans le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  :  $\frac{\pi - \alpha}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Nous donnons dans la table 3.1 quelques exemples en coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta)$  pour le champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Lorsque  $\gamma = 0$ , le champ magnétique est tangent à l'arête du dièdre et la droite  $\Upsilon$  n'est pas définie. Pour ce cas particulier, des résultats connus ont été rappelés dans la section 3.2. Lorsque  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , le champ magnétique est perpendiculaire à l'arête du dièdre et l'opérateur sur le secteur est alors

$$P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = -\Delta + (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta - \tau)^2,$$

il est en particulier réel.

Lorsque  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $\gamma$  est quelconque, le champ magnétique est contenu dans le plan bissecteur du dièdre d'équation  $\{x_2 = 0\}$ . On constate que la droite  $\Upsilon$  est toujours de type entrante. Le chapitre 7 sera consacré à ce cas particulier.

### 3.3.3 Continuité pour le bas du spectre

Nous montrons la continuité du bas du spectre de  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  par rapport au champ magnétique  $\mathbf{B}$  et à l'angle  $\alpha$  lorsque ceux-ci varient dans un domaine que nous allons préciser. Nous paramétrons  $\mathbf{B}$  par ses coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta)$ . En vue d'appliquer la théorie des perturbations à l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$ , nous allons chercher à expliciter son domaine de forme. La forme quadratique associée à cet opérateur est

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{A}, \tau}(u) = \int_{\mathcal{S}_\alpha} |\nabla_{\mathbf{A}} u|^2 + V_{\gamma, \theta, \tau} |u|^2 dx_1 dx_2 \quad (3.29)$$

définie sur le domaine de forme

$$H_{\mathbf{A}, V_{\gamma, \theta, \tau}}^1(\mathcal{S}_\alpha) = \{u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha), \nabla_{\mathbf{A}} u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha), \sqrt{V_{\gamma, \theta, \tau}} u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\}. \quad (3.30)$$

Nous allons comparer les domaines de forme pour différentes valeurs des paramètres. Nous commençons par étudier la dépendance par rapport au paramètre de Fourier  $\tau$  :

**Proposition 3.18.** *On suppose que  $\mathbf{B}$  et  $\alpha$  sont fixés. Alors la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .*

*Preuve :* Il suffit de vérifier que le domaine de forme de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  ne dépend pas de  $\tau$ . La condition  $\sqrt{V_{\gamma, \theta, \tau}} u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$  s'écrit

$$(x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau) u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha) .$$

Comme de plus  $u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$ , par linéarité on a  $(x_1 b_2 - x_2 b_1) u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$ . On a donc

$$\{u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha), \sqrt{V_{\mathbf{B}, \tau}} u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\} = \{u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha), (x_1 b_2 - x_2 b_1) u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\}$$

et la proposition est donc prouvée.  $\square$

Nous décrivons plus en détails le domaine de forme sous l'hypothèse que la droite sort du secteur (voir la définition 3.15) :

**Lemme 3.19.** *Supposons que  $\mathbf{B}$  satisfait la condition de la droite sortante, c'est-à-dire  $0 \leq \theta < \frac{\pi - \alpha}{2}$ . Alors le domaine de forme  $H_{\mathbf{A}, V_{\gamma, \theta, \tau}}^1(\mathcal{S}_\alpha)$  (cf (B.4)) coïncide avec l'espace*

$$\{u \in H^1(\mathcal{S}_\alpha), x_1 u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\} .$$

*En particulier il ne dépend ni de  $\gamma$  ni de  $\theta$  ni de  $\tau$ .*

*Preuve :* Soit  $u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$ , puisque  $\mathcal{S}_\alpha = \{x_2 < x_1 \tan \frac{\alpha}{2}\}$ , on a

$$x_1 u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha) \Rightarrow x_2 u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha) .$$



On déduit ensuite que

$$\{u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha), x_1 u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\} \subset \{u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha), \sqrt{V_{\gamma, \theta, \tau}} u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\}.$$

Pour l'inclusion réciproque, nous écrivons que  $|x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos(\theta + \phi)$ , avec  $|\phi| < \frac{\alpha}{2}$ . L'hypothèse du champ sortant nous dit que  $\cos(\theta + \frac{\alpha}{2}) > 0$ . On en déduit

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, \quad x_1 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{1}{\cos(\theta + \frac{\alpha}{2})} |x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta|.$$

Puisque pour  $\gamma \neq 0$  on a  $\sqrt{V_{\gamma, \theta, \tau}}(x_1, x_2) = \sin \gamma |x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta - \frac{\tau}{\sin \gamma}|$ , on a prouvé

$$\begin{aligned} \{u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha), \sqrt{V_{\gamma, \theta, \tau}} u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\} &= \{u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha), \sqrt{x_1^2 + x_2^2} u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\} \\ &= \{u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha), x_1 u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\}. \end{aligned}$$

On rappelle que  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(b_3)$  est linéaire. D'après ce qu'on vient de montrer, les hypothèses  $u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$  et  $\sqrt{V_{\gamma, \theta, \tau}} u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$  entraînent donc que  $\underline{\mathbf{A}}u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$ , puis l'hypothèse  $\nabla \underline{\mathbf{A}}u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$  implique  $\nabla u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$ . On a donc montré que  $H_{\underline{\mathbf{A}}, V_{\gamma, \theta, \tau}}^1(\mathcal{S}_\alpha)$  coïncide avec l'espace  $\{u \in H^1(\mathcal{S}_\alpha), x_1 u \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\}$ .  $\square$

**Remarque 3.20.** Si on définit  $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  la distance du point  $(x_1, x_2)$  à l'origine, on a montré lorsque le champ magnétique  $\mathbf{B}$  vérifie la condition de la droite sortante :

$$H_{\underline{\mathbf{A}}, V_{\gamma, \theta, \tau}}^1(\mathcal{S}_\alpha) = \{u \in H^1(\mathcal{S}_\alpha), ru \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)\}.$$

Nous pouvons maintenant montrer un résultat de régularité par rapport aux paramètres :

**Proposition 3.21.** *On définit l'ensemble  $E$  :*

$$E := \{(\gamma, \theta, \alpha) \in (0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times (0, \pi], \theta < \frac{\pi - \alpha}{2}\}.$$

*La fonction  $(\gamma, \theta, \alpha) \mapsto s(\gamma, \theta, \alpha)$  est continue sur  $E$ .*

*Preuve :* Nous travaillons avec la jauge de Landau  $\underline{\mathbf{A}}^L(x_1, x_2) = (0, x_1 \cos \gamma)$ . On réalise le changement de variable  $X_2 = \delta x_2$  avec  $\delta = \cot \frac{\alpha}{2}$  de sorte que l'ouvert  $\mathcal{S}_\alpha$  devient maintenant  $\mathcal{S}_{\frac{\pi}{2}} = \{|X_2| < x_1\}$ . L'opérateur est transformé en

$$D_{x_1}^2 + (\delta D_{X_2} - x_1 \cos \gamma)^2 + (x_1 \cos \theta \sin \gamma - \delta^{-1} X_2 \sin \theta \sin \gamma - \tau)^2. \quad (3.31)$$

D'après le lemme 3.19, le domaine de la forme quadratique associée est bien indépendant des paramètres si on a  $0 \leq \theta < \frac{\pi - \alpha}{2}$  et  $0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ . On déduit de la théorie des perturbations (voir [Kat95, section 7.2]) que

$$(\gamma, \theta, \alpha, \tau) \mapsto \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$$

est continue sur  $E \times \mathbb{R}$ . La proposition se déduit en passant à la borne inférieure sur  $\tau$  et en utilisant (3.18).  $\square$

La continuité près de  $\gamma = 0$  n'est pas encore acquise. Dans la section suivante nous allons montrer des estimations qui, dans certains cas, prouveront que la fonction  $s(\gamma, \theta; \alpha)$  est continue en  $\gamma = 0$ .

### 3.4 Bornes élémentaires pour le bas du spectre

Lorsque le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est unitaire et tangent à l'arête, sa coordonnée sphérique  $\gamma$  vaut 0 et la coordonnée  $\theta$  n'est pas définie. Nous rappelons que le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est alors minimal pour  $\tau = 0$  et vaut  $\mu(\alpha)$ . Des propriétés de cet opérateur modèle ont été rappelées dans la section 3.2. Dans la suite de ce chapitre nous allons chercher des estimations pour la quantité  $s(\gamma, \theta; \alpha)$  quand  $\gamma \neq 0$ , on cherchera en particulier à la comparer aux quantités spectrales modèles que sont  $\mu(\alpha)$  et  $\Theta_0$ .

#### 3.4.1 Découpage de l'opérateur

La proposition suivante consiste à introduire un paramètre réel supplémentaire et à comparer l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  à des opérateurs modèles pour obtenir une minoration :

**Proposition 3.22** (Découpage de l'opérateur). *Nous rappelons que  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$  avec  $b_i \geq 0$ . On a*

$$\forall \rho \in [0, 1], \quad (1 - \rho^2)\mu(\alpha)b_3 + \rho\Theta_0b_2 \leq s(\mathbf{B}, \alpha). \quad (3.32)$$

*Preuve :* Nous utilisons la jauge de Landau. L'opérateur s'écrit donc

$$P_{\underline{\mathbf{A}}^L, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = D_{x_1}^2 + (D_{x_2} - x_1b_3)^2 + (x_1b_2 - x_2b_1 - \tau)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha.$$

Nous allons travailler avec sa forme quadratique :

$$\mathcal{Q}_{\underline{\mathbf{A}}^L, \tau}(u) = \int_{\mathcal{S}_\alpha} |D_{x_1}u|^2 + |(D_{x_2} - x_1b_3)u|^2 + |(x_1b_2 - x_2b_1 - \tau)u|^2 dx_1 dx_2.$$

On réalise le changement d'échelle

$$\begin{cases} X_1 = x_1b_3^{1/2} \\ X_2 = x_2b_3^{1/2} \end{cases} \quad (3.33)$$

qui montre que la forme quadratique est unitairement équivalente à

$$u \mapsto \int_{\mathcal{S}_\alpha} b_3 |D_{X_1}u|^2 + b_3 |(D_{X_2} - X_1)u|^2 + |(X_1b_2b_3^{-1/2} - X_2b_1b_3^{-1/2} - \tau)u|^2 dX_1 dX_2. \quad (3.34)$$

Soit  $\rho \in (0, 1)$ . On écrit  $1 = (1 - \rho^2) + \rho^2$  pour découper la forme quadratique en (3.34) et on obtient que la forme quadratique de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^L, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est unitairement équivalente à la forme quadratique

$$\begin{aligned} u \mapsto & (1 - \rho^2)b_3 \int_{\mathcal{S}_\alpha} |D_{X_1}u|^2 + |(D_{X_2} - X_1)u|^2 dX_1 dX_2 \\ & + \int_{\mathcal{S}_\alpha} \rho^2 b_3 |(D_{X_2} - X_1)u|^2 dX_1 dX_2 \\ & + \int_{\mathcal{S}_\alpha} \rho^2 b_3 |D_{X_1}u|^2 + |(X_1b_2b_3^{-1/2} - X_2b_1b_3^{-1/2} - \tau)u|^2 dX_1 dX_2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

On introduit l'opérateur associé au troisième terme de (3.35) : il s'agit de la réalisation de Neumann sur l'ouvert  $\mathcal{S}_\alpha$  de

$$L_\rho := \rho^2 b_3 D_{X_1}^2 + (X_1 b_2 b_3^{-1/2} - X_2 b_1 b_3^{-1/2} - \tau)^2, \quad (X_1, X_2) \in \mathcal{S}_\alpha.$$

En utilisant le principe du min-max pour la forme quadratique écrite en (3.35) est en négligeant le deuxième terme qui est positif, on obtient :

$$\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) \geq (1 - \rho^2) b_3 \inf \mathfrak{S} (D_{X_1}^2 + (D_{X_2} - X_1)^2) + \inf \mathfrak{S} (L_\rho),$$

On reconnaît l'opérateur modèle de la section 3.2 et on a

$$\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) \geq (1 - \rho^2) b_3 \mu(\alpha) + \inf \mathfrak{S} (L_\rho). \quad (3.36)$$

Nous minorons maintenant le spectre de l'opérateur  $L_\rho$  : en réalisant le changement de variable  $Y_1 = b_2^{1/2} (b_3 \rho)^{-1/2} X_1$ , on a

$$\rho^2 b_3 D_{X_1}^2 = \rho b_2 D_{Y_1}^2 \quad \text{et} \quad X_1 b_2 b_3^{-1/2} = Y_1 (\rho b_2)^{1/2}.$$

L'opérateur  $L_\rho$  est donc unitairement équivalent à la réalisation de Neumann de

$$\rho b_2 \left( D_{Y_1}^2 + \left( Y_1 - \frac{X_2 b_1 b_3^{-1/2} + \tau}{(\rho b_2)^{1/2}} \right)^2 \right)$$

sur l'ouvert

$$\begin{cases} 0 < Y_1 \\ |X_2| < \tan \frac{\alpha}{2} \left( \frac{b_3 \rho}{b_2} \right)^{-1/2} Y_1. \end{cases}$$

En raisonnant à  $X_2$  fixé comme dans la preuve de la proposition 2.11, on a donc

$$\inf \mathfrak{S} (L_\rho) \geq b_2 \rho \Theta_0.$$

On conclut en utilisant (3.36) et (3.18).  $\square$

**Remarque 3.23.** Dans la minoration (3.32), nous avons un terme avec un facteur  $1 - \rho^2$  au lieu du facteur habituel  $\sqrt{1 - \rho^2}$  (qui donne en théorie une meilleure estimation, voir la proposition 2.11 ou la preuve de [HM02, section 3] par exemple). Ceci est dû au fait que nous avons utilisé la minoration grossière  $(D_{X_2} - X_1)^2 \geq 0$  dans la preuve. Si on suit la preuve de la proposition 2.11, on obtient la minoration

$$\forall \rho \in [0, 1], \quad \sqrt{1 - \rho^2} \mu(\alpha') b_3 + \rho \Theta_0 b_2 \leq s(\mathbf{B}, \alpha), \quad (3.37)$$

où  $\alpha' \in [0, \alpha]$  est défini par  $\tan \frac{\alpha'}{2} = \sqrt{1 - \rho^2} \tan \frac{\alpha}{2}$ . Puisque nous ne savons pas si la fonction  $\alpha \mapsto \mu(\alpha)$  est croissante, nous ne pouvons pas utiliser cette minoration directement pour comparer  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  et  $\mu(\alpha)$ . On pourrait utiliser le fait que  $\alpha \mapsto \mu(\alpha)/\alpha$  est décroissante afin de relier  $\mu(\alpha')$  et  $\mu(\alpha)$ , mais la relation qui définit  $\alpha'$  rend la minoration difficile à exploiter.

On a immédiatement en prenant  $\rho = 0$  :

**Corollaire 3.24.** *Pour tout angle  $\alpha \in (0, \pi]$  et pour tout champ magnétique  $\mathbf{B}$  constant unitaire avec  $b_i \geq 0$ , on a*

$$\mu(\alpha)b_3 \leq s(\mathbf{B}; \alpha) ,$$

*soit en coordonnées sphériques :*

$$\mu(\alpha) \cos \gamma \leq s(\gamma, \theta; \alpha) .$$

Une question pertinente est de savoir pour quelles valeurs du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et de l'angle  $\alpha$  l'inégalité  $\mu(\alpha) \leq s(\mathbf{B}; \alpha)$  est vraie : on pourrait s'attendre à ce que le bas du spectre soit minimal lorsque le champ magnétique est tangent à l'arête du dièdre. Dans le cas du quart d'espace ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), les travaux de [Pan02] répondent à cette question dans certains cas particuliers.

- Dans le cas où  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire lorsque le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire à l'arête du dièdre, on a

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \Theta_0 \leq s(\frac{\pi}{2}, \theta; \frac{\pi}{2}) \quad (3.38)$$

et on a égalité si et seulement si  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , c'est-à-dire si le champ magnétique est tangent à une des faces du dièdre :

$$s(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}) = \Theta_0 . \quad (3.39)$$

En utilisant le fait que  $\mu(\frac{\pi}{2}) < \Theta_0$ , on a donc

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \mu(\frac{\pi}{2}) < s(\frac{\pi}{2}, \theta; \frac{\pi}{2}) .$$

Il est de plus démontré que la fonction  $\theta \mapsto s(\frac{\pi}{2}, \theta; \frac{\pi}{2})$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  puis à nouveau strictement croissante sur  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ .

- Dans le cas où  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , c'est-à-dire quand le champ magnétique est contenu dans une des faces du dièdre, la fonction  $\gamma \mapsto s(\gamma, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$  est continue et strictement croissante de  $[0, \frac{\pi}{2}]$  dans  $[\mu(\frac{\pi}{2}), \Theta_0]$ . On a donc

$$\forall \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \mu(\frac{\pi}{2}) \leq s(\gamma, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$$

avec égalité si et seulement si  $\gamma = 0$ , c'est-à-dire si le champ magnétique est parallèle à l'arête du dièdre.

La plupart des démonstrations issues de [Pan02] utilisent la structure symétrique du quart d'espace pour se ramener à l'étude sur le demi-espace. Ainsi les preuves faites pour le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ne s'adaptent pas en général au cas  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ .

Nous introduisons la définition suivante :

**Définition 3.25.** *Nous notons*

$$r(\alpha) := \frac{\mu(\alpha)}{\Theta_0} .$$

D'après (3.22), on a  $r(\alpha) \leq 1$  pour tout  $\alpha \in (0, \pi]$ . De plus l'inégalité est stricte si  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

Pour comparer le bas du spectre de  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  à  $\mu(\alpha)$  quand  $\alpha \in (0, \pi)$ , nous allons optimiser la minoration (3.32) par rapport à  $\rho$  afin de répondre de manière partielle à la question “a-t-on  $\mu(\alpha) \leq s(\mathbf{B}; \alpha)$ ?”. On commence par l'évaluer pour  $\rho = 1$  et on a le résultat suivant :

**Corollaire 3.26.** *On suppose que le couple  $(b_2, \alpha)$  vérifie la condition*

$$r(\alpha) \leq b_2 . \quad (3.40)$$

*On a alors*

$$\mu(\alpha) \leq s(\mathbf{B}; \alpha) .$$

**Remarque 3.27.** Puisque  $\mu(\alpha) \leq \Theta_0$ , la condition du corollaire est vérifiée pour tout  $\alpha \in (0, \pi)$  quand  $b_2 = 1$ . Remarquons que si  $\mu(\alpha) = \Theta_0$ , la condition du corollaire n'est vérifiée que pour  $b_2 = 1$ . En fait plus  $\mu(\alpha)$  est éloigné de  $\Theta_0$ , plus la condition sur  $b_2$  est faible. En particulier, dès que  $b_2$  est fixé non nul, la condition est vérifiée pour  $\alpha$  assez petit puisque  $\mu(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ .

Si  $b_3 \neq 0$ , le minorant de (3.32) est une parabole tournée vers le bas, qui atteint son maximum en

$$\rho_0 := \frac{\Theta_0 b_2}{2\mu(\alpha)b_3} = \frac{b_2}{2b_3} (r(\alpha))^{-1} .$$

On note que  $\rho_0 \geq 0$ . Si  $\rho_0 \geq 1$ , le minorant de (3.32) est croissant par rapport à  $\rho$  sur  $[0, 1]$  et la minoration (3.32) est optimale pour  $\rho = 1$ , en particulier elle n'entraîne pas de résultat plus fort que le corollaire 3.26.

On traite le cas  $\rho_0 \in (0, 1)$ . Le maximum du membre de gauche de (3.32) est atteint en  $\rho_0$  et vaut  $\mu(\alpha)b_3 + \frac{\Theta_0^2 b_2^2}{4\mu(\alpha)b_3}$ . On a donc :

**Lemme 3.28.** *Supposons que  $\rho_0 \leq 1$ , c'est-à-dire  $\frac{b_2}{2b_3} \leq r(\alpha)$ . La minoration optimale fournie par l'inégalité (3.32) est alors*

$$\mu(\alpha)b_3 + \frac{\Theta_0^2 b_2^2}{4\mu(\alpha)b_3} \leq s(\mathbf{B}; \alpha) .$$

On déduit une condition suffisante pour avoir  $\mu(\alpha) \leq s(\mathbf{B}; \alpha)$  :

**Proposition 3.29.** *Supposons que les paramètres vérifient les conditions  $\frac{1}{2} \leq b_3$  et*

$$r(\alpha) \leq \frac{b_2}{2\sqrt{b_3(1-b_3)}} . \quad (3.41)$$

*On a alors*

$$\mu(\alpha) \leq s(\mathbf{B}; \alpha) .$$

FIGURE 3.7 – Zone de  $r(\alpha)$  pour laquelle la proposition 3.29 s'applique lorsque  $\frac{1}{2} \leq b_3$ .

*Preuve :* Supposons que  $\frac{1}{2} \leq b_3$ , ce qui implique  $\frac{b_2}{2b_3} \leq b_2$ . Nous supposons aussi  $0 \leq r(\alpha) \leq \frac{b_2}{2\sqrt{b_3(1-b_3)}}$ . Les positions relatives des quantités  $\frac{b_2}{2b_3}$ ,  $b_2$  et  $\frac{b_2}{2\sqrt{b_3(1-b_3)}}$  sont décrites sur la figure 3.7.

On fait la disjonction de cas suivante :

- Soit  $r(\alpha) \in (0, \frac{b_2}{2b_3})$ , et donc  $r(\alpha) \leq b_2$ . D'après le corollaire 3.26, on a  $\mu(\alpha) \leq s(\mathbf{B}; \alpha)$ .
- Soit  $r(\alpha) \geq \frac{b_2}{2b_3}$ . On a donc  $\rho_0 \leq 1$ , et d'après le lemme 3.28, une condition suffisante pour avoir  $\mu(\alpha) \leq s(\mathbf{B}; \alpha)$  est donc :

$$\mu(\alpha) \leq \mu(\alpha)b_3 + \frac{\Theta_0^2 b_2^2}{4\mu(\alpha)b_3}$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned} 4\mu(\alpha)^2 b_3(1-b_3) &\leq \Theta_0^2 b_2^2 \\ \iff r(\alpha) &\leq \frac{b_2}{2\sqrt{b_3(1-b_3)}} \end{aligned}$$

et la proposition est donc prouvée. □

Décrivons cette proposition : pour tout  $b_3 \in (0, 1]$ , on a  $4b_3(1-b_3) \leq 1$ , ainsi la condition  $r(\alpha) \leq \frac{b_2}{2\sqrt{b_3(1-b_3)}}$  est moins forte que celle du corollaire 3.26, mais il faut imposer  $\frac{1}{2} \leq b_3$  pour vérifier les hypothèses de la proposition 3.29.

**Remarque 3.30.** On a  $\frac{b_2}{2\sqrt{b_3(1-b_3)}} = \frac{b_2}{2b_3} \sqrt{\frac{b_3}{1-b_3}}$ . Ainsi lorsque  $b_3 < \frac{1}{2}$ , on a  $\frac{b_2}{2\sqrt{b_3(1-b_3)}} < \frac{b_2}{2b_3}$  et on ne peut pas avoir simultanément  $\rho_0 \leq 1$  et  $r(\alpha) \leq \frac{b_2}{2\sqrt{b_3(1-b_3)}}$  (cette situation est décrite sur la figure 3.8).

FIGURE 3.8 – Positions relatives de  $b_2$ ,  $\frac{b_2}{2\sqrt{b_3(1-b_3)}}$  et  $\frac{b_2}{2b_3}$  lorsque  $b_3 < \frac{1}{2}$ , ainsi que la zone de  $r(\alpha)$  pour laquelle le corollaire 3.26 s'applique.

**Remarque 3.31.** Dans le cas où  $r(\alpha) = 1$ , c'est-à-dire lorsque  $\mu(\alpha) = \Theta_0$ , les conditions de la proposition 3.29 ne peuvent jamais être vérifiées : en effet, en utilisant  $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$ , la condition (3.41) implique

$$b_1^2 \leq 3b_3^2 - 4b_3 + 1 .$$

On constate alors que le membre de droite est strictement négatif pour  $b_3 \in (\frac{1}{3}, 1)$ , or les hypothèses de la proposition 3.29 impose  $\frac{1}{2} \leq b_3$ , et nous rappelons que nous avons supposé que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  n'était pas tangent à l'arête du dièdre, soit  $b_3 < 1$ .

### 3.4.2 Inégalité diamagnétique

Nous exploitons maintenant l'inégalité diamagnétique qui consiste à minorer (au sens des formes quadratiques) un laplacien magnétique par un laplacien usuel :

**Proposition 3.32.** On a pour  $(\gamma, \theta, \alpha) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times (0, \pi)$  :

$$s(\frac{\pi}{2}, \theta, \alpha) \sin \gamma \leq s(\gamma, \theta, \alpha) . \quad (3.42)$$

*Preuve :* Nous utilisons l'inégalité diamagnétique (voir [FH10]) :

$$|\nabla_{\mathbf{A}} u|^2 + V_{\gamma, \theta, \tau} |u|^2 \geq |\nabla |u||^2 + V_{\gamma, \theta, \tau} |u|^2 ,$$

valable pour toute fonction  $u$  dans le domaine de forme de l'opérateur. On a donc

$$\int_{\mathcal{S}_\alpha} |\nabla_{\mathbf{A}} u|^2 + V_{\gamma, \theta, \tau} |u|^2 \geq \int_{\mathcal{S}_\alpha} |\nabla |u||^2 + V_{\gamma, \theta, \tau} |u|^2 ,$$

on utilise le changement de variables  $(X_1, X_2) = \sqrt{\sin \gamma} (x_1, x_2)$  qui laisse bien le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  invariant. On a

$$V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1, x_2) = \sin \gamma V_{\frac{\pi}{2}, \theta, \frac{\tau}{\sqrt{\sin \gamma}}}(X_1, X_2) .$$

On obtient

$$\frac{\int_{\mathcal{S}_\alpha} |\nabla_{\mathbf{A}} u|^2 + V_{\gamma, \theta, \tau} |u|^2}{\|u\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2} \geq \sin \gamma \frac{\int_{\mathcal{S}_\alpha} |\nabla |u||^2 + V_{\frac{\pi}{2}, \theta, \frac{\tau}{\sqrt{\sin \gamma}}} |u|^2}{\|u\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2} .$$

Avec le principe du min-max, on trouve

$$\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) \geq \underline{s}(\frac{\pi}{2}, \theta; \alpha, \frac{\tau}{\sqrt{\sin \gamma}}) \sin \gamma .$$

On passe à la borne inférieure sur  $\tau$  et on déduit de (3.18) la proposition.  $\square$

Il est montré dans [Pan02] que dans le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad s(\frac{\pi}{2}, \theta; \frac{\pi}{2}) \geq \Theta_0 .$$

Pour montrer que ce résultat reste vrai pour d'autres valeurs de  $\alpha$ , on peut essayer de minorer  $s(\frac{\pi}{2}, \gamma; \alpha)$  à l'aide des techniques de "découpage" vues plus haut. Nous faisons la remarque suivante : si  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ , on peut choisir un repère cartésien de  $\mathcal{S}_\alpha$  tel que les deux axes entrent dans le secteur.

**Proposition 3.33.** Soit  $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ . On suppose que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est orthogonal à l'arête du dièdre, c'est-à-dire  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ . On a alors la minoration suivante :

$$\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad s(\frac{\pi}{2}, \theta; \alpha) \geq \Theta_0. \quad (3.43)$$

*Preuve :* Nous cherchons à minorer l'opérateur

$$D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta - \tau)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha.$$

On réalise le changement de variable associé à la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\omega$ .

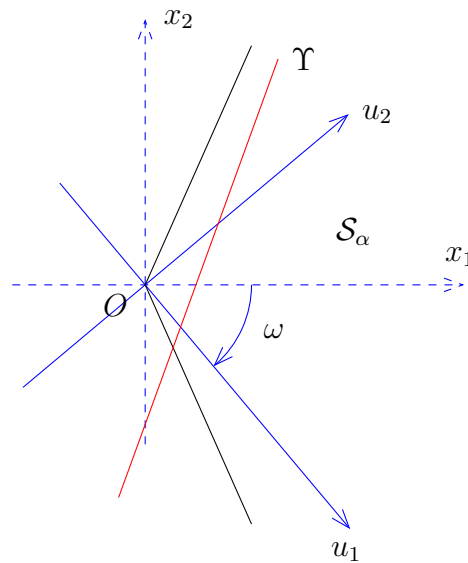


FIGURE 3.9 – Le changement de coordonnées associé à la rotation d'angle  $\omega$  avec  $(u_1, u_2) = R_\omega(x_1, x_2)$ . Si  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  et  $\omega \in (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$ , les demi-axes  $\{u_1 > 0\}$  et  $\{u_2 > 0\}$  sont contenus dans le secteur.

On note  $R_\omega$  cette rotation et  $(u_1, u_2) := R_\omega(x_1, x_2)$  les nouvelles variables. L'opérateur unitairement équivalent obtenu est la réalisation de Neumann de

$$-\partial_{u_1}^2 - \partial_{u_2}^2 + (u_1 \cos(\theta + \omega) - u_2 \sin(\theta + \omega) - \tau)^2$$

sur l'ouvert  $R_\omega(\mathcal{S}_\alpha)$ . Nous faisons alors la remarque suivante : si l'angle de la rotation vérifie  $\omega \in (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$ , les demi-axes  $\{u_1 > 0\}$  et  $\{u_2 > 0\}$  sont tous les deux contenus dans l'ouvert  $R_\omega(\mathcal{S}_\alpha)$  (voir la figure 3.9). On introduit les deux opérateurs (avec condition de Neumann) :

$$L_{\rho, u_2} := -\partial_{u_1}^2 + \rho^2(u_1 \cos(\theta + \omega) - u_2 \sin(\theta + \omega) - \tau)^2, \quad u_1 > 0$$

et

$$L_{\rho, u_1} := -\partial_{u_2}^2 + (1 - \rho^2)(u_1 \cos(\theta + \omega) - u_2 \sin(\theta + \omega) - \tau)^2, \quad u_2 > 0.$$



En utilisant des changements d'échelle et le principe du min-max comme dans la preuve de la proposition 3.32, on obtient

$$\inf \mathfrak{S}(L_{\rho, u_2}) \geq \rho \cos(\theta + \omega) \Theta_0 \quad \text{et} \quad \inf \mathfrak{S}(L_{\rho, u_1}) \geq \sqrt{1 - \rho^2} \sin(\theta + \omega) \Theta_0$$

et donc

$$\forall \rho \in [0, 1], \quad s(\frac{\pi}{2}, \theta; \alpha) \geq \left( \rho \cos(\theta + \omega) + \sqrt{1 - \rho^2} \sin(\theta + \omega) \right) \Theta_0.$$

On optimise cette minoration en prenant  $\rho = \cos(\theta + \omega)$  et la proposition est prouvée.  $\square$

On a donc un autre résultat de comparaison :

**Corollaire 3.34.** *On suppose que  $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ , et que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  de coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta)$  vérifie la condition*

$$\Theta_0 \sin \gamma \geq \mu(\alpha). \quad (3.44)$$

Alors on a  $s(\gamma, \theta; \alpha) \geq \mu(\alpha)$ .

**Remarque 3.35.** Si dans les hypothèses du corollaire 3.26 (respectivement de la proposition 3.29 et du corollaire 3.34) l'inégalité (3.40) (respectivement (3.41) et (3.44)) est stricte, alors on a

$$\mu(\alpha) < s(\mathbf{B}; \alpha).$$

### 3.4.3 Construction de quasi-modes

On cherche maintenant une majoration de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  en construisant des quasi-modes.

**Proposition 3.36.** *On suppose que  $b_3 \neq 0$ , c'est-à-dire que  $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ . On rappelle que  $(\gamma, \theta)$  sont les coordonnées sphériques du champ  $\mathbf{B}$ . On suppose que  $\mu(\alpha) < \Theta_0$ . On a alors l'existence d'une constante  $C_\alpha > 0$  telle que*

$$\forall (\gamma, \theta) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}], \quad s(\gamma, \theta; \alpha) \leq \mu(\alpha) \cos \gamma + C_\alpha \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma}. \quad (3.45)$$

*Preuve :* Nous travaillons avec la jauge de Landau  $\underline{\mathbf{A}}^L \in \mathcal{A}(b_3)$ . Nous allons chercher à majorer le bas du spectre de l'opérateur

$$P_{\underline{\mathbf{A}}^L, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$$

pour  $\tau = 0$ . En reprenant le changement de variables défini en (3.33), on voit que l'opérateur est unitairement équivalent à la réalisation de Neumann de

$$\cos \gamma (D_{X_1}^2 + (D_{X_2} - X_1)^2) + \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} (X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta)^2, \quad (X_1, X_2) \in \mathcal{S}_\alpha. \quad (3.46)$$

On a clairement

$$\forall \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \forall (X_1, X_2) \in \mathcal{S}_\alpha, \quad (X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta)^2 \leq X_1^2 + X_2^2. \quad (3.47)$$

Puisque  $\mu(\alpha) < \Theta_0$ , il existe un vecteur propre normalisé  $U_\alpha$  associé à  $\mu(\alpha)$  pour la réalisation de Neumann de  $D_{X_1}^2 + (D_{X_2} - X_1)^2$  sur  $\mathcal{S}_\alpha$ . D'après l'estimation (3.26), ce vecteur est à décroissance exponentielle. On a donc :

$$\exists C_\alpha > 0, \quad \int_{\mathcal{S}_\alpha} (X_1^2 + X_2^2) |U_\alpha(X_1, X_2)|^2 dX_1 dX_2 \leq C_\alpha. \quad (3.48)$$

On utilise  $U_\alpha$  comme quasi-mode pour la forme quadratique de l'opérateur écrit en (3.46), et en utilisant les estimations (3.47) et (3.48), on prouve la majoration

$$s(\gamma, \theta; \alpha, 0) \leq \mu(\alpha) \cos \gamma + C_\alpha \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma}.$$

On conclut grâce à la relation (3.18). □

**Remarque 3.37.** La majoration précédente est uniforme par rapport à  $\theta$ .

La majoration que nous venons de montrer permet de compléter la proposition 3.21 en étudiant le comportement de  $s(\gamma, \theta; \alpha)$  près de  $\gamma = 0$  :

**Proposition 3.38.** *Supposons que  $\mu(\alpha) < \Theta_0$ , alors la fonction  $(\gamma, \theta) \mapsto s(\gamma, \theta; \alpha)$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}) \times [0, \frac{\pi-\alpha}{2})$ .*

*Preuve :* En combinant le corollaire 3.24 et (3.45), on a pour  $\alpha$  fixé vérifiant  $\mu(\alpha) < \Theta_0$  :

$$\forall (\gamma, \theta) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}], \quad \mu(\alpha) \cos \gamma \leq s(\gamma, \theta; \alpha) \leq \mu(\alpha) \cos \gamma + C_\alpha \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma}.$$

On fait alors tendre  $\gamma$  vers 0 et on obtient

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} s(\gamma, \theta; \alpha) = \mu(\alpha), \quad (3.49)$$

de plus la convergence est uniforme par rapport à  $\theta$ . Or on a  $s(0, \theta; \alpha) = \mu(\alpha)$ , la proposition est donc montrée. □

On a aussi en reprenant la preuve de la proposition précédente :

**Proposition 3.39.** *Soit  $\alpha \in (0, \pi)$  tel que  $\mu(\alpha) < \Theta_0$  et  $\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \pi]$ . Alors la fonction  $\gamma \mapsto s(\gamma, \theta, \alpha)$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .*



# Chapitre 4

## Caractérisation du spectre essentiel sur le secteur

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au spectre essentiel de l'opérateur  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{B}, \tau}$  sur le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  défini dans le chapitre précédent. Dans la première section, nous explicitons le bas du spectre de cet opérateur dans deux cas modèles : le plan et le demi-plan. Dans la section 4.2, nous démontrons que le spectre essentiel de l'opérateur sur le secteur dépend fortement de la position de la droite  $\Upsilon$  d'annulation du potentiel électrique  $V_{\underline{B}, \tau}$  par rapport au secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  (au sens des définitions 3.15, 3.16 et 3.17). Dans le cas où la droite  $\Upsilon$  est tangente au secteur, de nombreuses simulations numériques illustrent le comportement par rapport à  $\tau$  du bas du spectre de  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{B}, \tau}$ . La section 4.4 présente des estimées de concentrations pour des vecteurs propres associés à des valeurs propres sous le spectre essentiel indépendamment de la position de la droite  $\Upsilon$ .

### 4.1 Opérateurs modèles sur le plan et le demi-plan

En vue d'utiliser le lemme de Persson, nous étudions l'opérateur sur le secteur introduit dans le chapitre précédent sur deux domaines modèles : le plan et le demi-plan. Dans la suite,  $\underline{B} = (b_1, b_2, b_3)$  est un champ magnétique constant unitaire avec  $b_i \geq 0$  et  $\underline{A} \in \mathcal{A}(b_3)$  est un potentiel magnétique plan vérifiant  $\text{rot } \underline{A} = b_3$ . Nous notons  $\underline{B} = (b_1, b_2)$  la projection du champ magnétique sur le plan  $\{x_3 = 0\}$ . Nous rappelons que le potentiel électrique s'écrit :

$$V_{\underline{B}, \tau}(x_1, x_2) = (x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau)^2 .$$

La proposition suivante est démontrée dans [Pan02] et peut se déduire directement de la proposition B.10 :

**Proposition 4.1.** *Soit  $\tau \in \mathbb{R}$ . Le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec potentiel magnétique  $\underline{A}$  et potentiel électrique  $V_{\underline{B}, \tau}$  sur le plan est connu :*

$$\mathfrak{S}(P_{\underline{A}, \mathbb{R}^2} + V_{\underline{B}, \tau}) = [1, +\infty) . \quad (4.1)$$

Nous rappelons que  $\mathcal{D}_\pi$  est le demi-espace  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 > 0\}$ . Nous étendons la définition (3.8) en posant  $\mathcal{S}_\pi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0\}$  : il s'agit d'un demi-plan. Rappelons que pour  $\underline{\mathbf{B}} \neq 0$ , la droite  $\Upsilon$  est la droite d'équation  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = 0$ , c'est-à-dire  $x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau = 0$  (cf (3.28)). Cette droite fait l'angle  $\theta$  avec le bord de  $\mathcal{S}_\pi$ . L'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est bien défini d'après la section B.2. Par extension de la définition (3.15), nous posons

$$\underline{s}(\mathbf{B}; \pi, \tau) = \inf \mathfrak{S}(P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}) .$$

Cette fonction a déjà été étudiée dans [Pan02]. Nous en proposons une forme explicite qui permet d'améliorer les résultats de [Pan02, proposition 5.2].

Nous commençons par rappeler que pour un angle  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , la quantité  $\sigma_1(\beta)$  désigne le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur  $\mathcal{L}_\beta$  défini à partir de l'expression  $-\Delta + (t \cos \beta - s \sin \beta)^2$  sur le demi-plan  $\mathbb{R}_+^2 := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2, t > 0\}$ . Cet opérateur est étudié dans le chapitre 2.

Dans le cas particulier où le champ magnétique est de la forme  $\mathbf{B} = (\sin \theta, \cos \theta, 0)$  (c'est-à-dire  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , cf table 3.1) et  $\tau = 0$ , on obtient  $\underline{\mathbf{A}} = 0$  et  $V_{\underline{\mathbf{B}}, 0} = (x_1 \cos \theta - s \sin \theta)^2$ . Puisque le demi-plan  $\mathbb{R}_+^2$  se déduit de  $\mathcal{S}_\pi$  par une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ , on constate que les opérateurs  $\mathcal{L}_\theta$  et  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\underline{\mathbf{B}}, 0}$  sont unitairement équivalents dans ce cas-là. Dans le cas général on s'attend à avoir une relation entre  $\sigma_1$  et  $\underline{s}(\mathbf{B}; \pi, \tau)$ . Nous introduisons une fonction auxiliaire :

**Définition 4.2.** On note pour  $x \in [-1, 1]$  :

$$\sigma_1^{\text{aux}}(x) := \sigma_1(\arcsin x) . \quad (4.2)$$

On sait que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sigma_1^{\text{aux}}(x) \in (\Theta_0, 1] .$$

**Proposition 4.3.** Nous supposons que la projection  $\underline{\mathbf{B}}$  du champ magnétique n'est pas tangente au bord du demi-plan  $\mathcal{S}_\pi$ , c'est-à-dire  $b_1 \neq 0$  ou de manière équivalente  $\sin \gamma \sin \theta \neq 0$ . Alors le bas du spectre de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  ne dépend pas de  $\tau$ . De plus

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \underline{s}(\mathbf{B}; \pi, \tau) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \theta) \quad (4.3)$$

et il s'agit d'une valeur propre simple.

*Preuve :* Rappelons que  $b_1 = \sin \gamma \sin \theta$  et que le potentiel est défini par  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}(x_1, x_2) = (x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau)^2$ . Comme  $b_1 \neq 0$ , on peut effectuer le changement de variable (qui laisse  $\mathcal{S}_\pi$  invariant) :

$$X_2 b_1 = x_2 b_1 - \tau$$

et on constate que le spectre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est à égal à celui de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\underline{\mathbf{B}}, 0}$  et ne dépend donc pas de  $\tau$ . On étend naturellement la définition de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  à  $\alpha = \pi$  en posant

$$s(\mathbf{B}; \pi) = \inf \mathfrak{S}(P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{D}_\pi}) .$$

On a alors en vertu de (3.18) que

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \underline{s}(\mathbf{B}; \pi, \tau) = s(\mathbf{B}, \pi) .$$

On remarque alors que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  fait l'angle  $\beta = \arcsin(\sin \gamma \sin \theta)$  avec le bord du demi-espace  $\mathcal{D}_\pi$ . Puisque les opérateurs  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\pi}$  et  $P_{\mathbf{A}_\beta, \mathbb{R}_+^3}$  (cf (B.19)) sont unitairement équivalents, on a d'après (B.20) :

$$s(\mathbf{B}; \pi) = \sigma(\arcsin(\sin \gamma \sin \theta)) .$$

Nous rappelons la relation (B.28) : pour  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\sigma(\beta) = \sigma_1(\beta)$ . On déduit (4.3) avec  $\beta = \arcsin(\sin \gamma \sin \theta)$  et la définition 4.2. De plus, la valeur  $\underline{s}(\mathbf{B}; \pi, \tau)$  correspond à une valeur propre simple pour l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  : c'est une conséquence directe du fait que  $\sigma_1(\beta)$  correspond à une valeur propre simple pour l'opérateur modèle  $\mathcal{L}_\beta$  si  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ .  $\square$

Nous rappelons que  $(\gamma, \theta)$  désigne les coordonnées sphériques du champ  $\mathbf{B}$  (voir (3.1)). Lorsque  $\gamma \neq 0$  et  $\theta \neq 0$ , la propriété précédente devient en coordonnées sphériques

$$\underline{s}(\gamma, \theta; \pi, \tau) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \theta) .$$

Lorsque  $\gamma \neq 0$  et  $\theta = 0$ , c'est-à-dire lorsque le champ s'écrit  $\mathbf{B} = (0, \sin \gamma, \cos \gamma)$ , la droite  $\Upsilon$  est parallèle au bord du demi-plan  $\mathcal{S}_\pi$  (voir la figure 4.1). Cette fois-ci le bas du spectre de  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  va dépendre de la valeur de  $\tau$ .

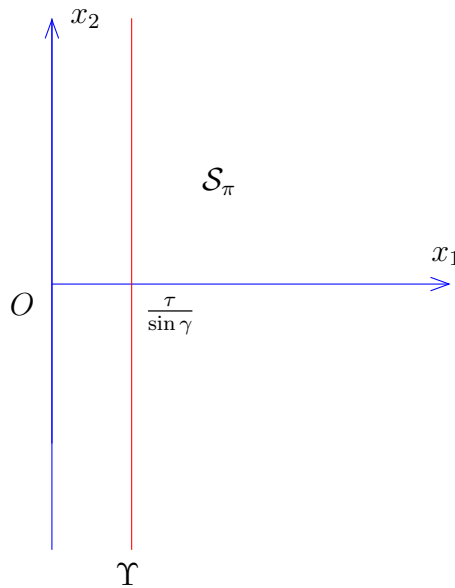


FIGURE 4.1 – La droite  $\Upsilon$  est parallèle au bord de  $\mathcal{S}_\pi$ .

Nous rappelons que  $\mu_1^N(\xi)$  désigne le bas du spectre de la réalisation de Neumann de  $-\partial_t^2 + (t - \xi)^2$  sur  $t > 0$ . Cette fonction a été étudiée dans le chapitre 1.

**Proposition 4.4.** *Nous supposons que la projection  $\underline{\mathbf{B}}$  du champ magnétique est tangente au bord du demi-plan, c'est-à-dire  $b_1 = 0$  ou de manière équivalente  $\sin \gamma \sin \theta = 0$ . On a*

$$\forall \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}], \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau) = \inf_{\xi_2 \in \mathbb{R}} (\mu_1^N(\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma) + (\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2) \quad (4.4)$$

et cette valeur correspond à du spectre essentiel pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ .

*Preuve :* Nous choisissons de travailler avec le potentiel de Landau  $\underline{\mathbf{A}}^L(x_1, x_2) = (0, x_1)$  qui ne dépend pas de  $x_2$ , ainsi l'opérateur associé sur le demi-plan s'écrit

$$P_{\underline{\mathbf{A}}^L, \mathcal{S}_\pi} + V_{\gamma, 0, \tau} = D_{x_1}^2 + (D_{x_2} - x_1 \cos \gamma)^2 + (x_1 \sin \gamma - \tau)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\pi.$$

Grâce à une transformation de Fourier en  $x_2$  nous avons :

$$P_{\underline{\mathbf{A}}^L, \mathcal{S}_\pi} + V_{\gamma, 0, \tau} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} D_{x_1}^2 + (\xi_2 - x_1 \cos \gamma)^2 + (x_1 \sin \gamma - \tau)^2 d\xi_2.$$

On a donc une relation :

$$\underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau) = \inf_{\xi_2 \in \mathbb{R}} \mathfrak{S} (D_{x_1}^2 + (\xi_2 - x_1 \cos \gamma)^2 + (x_1 \sin \gamma - \tau)^2).$$

Or on a

$$(\xi_2 - x_1 \cos \gamma)^2 + (x_1 \sin \gamma - \tau)^2 = (x_1 - \tau \sin \gamma - \xi_2 \cos \gamma)^2 + (\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2,$$

et donc pour  $\xi_2 \in \mathbb{R}$  fixé :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} (D_{x_1}^2 + (\xi_2 - x_1 \cos \gamma)^2 + (x_1 \sin \gamma - \tau)^2) \\ = \mathfrak{S} (D_{x_1}^2 + (x_1 - \tau \sin \gamma - \xi_2 \cos \gamma)^2) + (\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\mathfrak{S} (D_{x_1}^2 + (\xi_2 - x_1 \cos \gamma)^2 + (x_1 \sin \gamma - \tau)^2) = \mu_1^N(\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma) + (\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2.$$

On a montré

$$\underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau) = \inf_{\xi_2 \in \mathbb{R}} (\mu_1^N(\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma) + (\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2).$$

□

Cette formule permet d'obtenir :

**Corollaire 4.5.** *On a l'estimation suivante :*

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \Theta_0 \leq \underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau) \leq \min \left( \Theta_0 + (\xi_0 \tan \gamma - \frac{\tau}{\cos \gamma})^2, \mu_1^N(\frac{\tau}{\sin \gamma}) \right). \quad (4.5)$$

De plus,

$$\underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau) = \Theta_0 \iff \tau = \xi_0 \sin \gamma.$$

## 4.2 Bas du spectre essentiel

Nous déterminons ici le bas du spectre essentiel de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . Nous rappelons que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est paramétré par ses coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta)$ . Nous allons voir que le spectre essentiel dépend fortement de la géométrie du problème. Dans le cas où le champ magnétique est tangent à l'arête du dièdre, la proposition suivante (issue de [Bon03b]) donne le bas du spectre essentiel :

**Proposition 4.6.** *On suppose que  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ , c'est-à-dire  $\gamma = 0$ . On a alors*

$$\forall \alpha \in (0, \pi], \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \underline{\sigma}_{\text{ess}}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) = [\Theta_0 + \tau^2, +\infty) .$$

Dans le cas  $\gamma \neq 0$ , la situation est différente : on a un opérateur avec un potentiel électrique  $V_{\gamma, \theta, \tau}$  non constant. L'ensemble des zéros de ce potentiel sur  $\mathcal{S}_\alpha$  est composé de l'ensemble  $\Upsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$  où la droite  $\Upsilon$  a été introduite dans la sous-section 3.3.3. Nous rappelons que la droite  $\Upsilon$  fait l'angle  $\theta$  avec l'axe  $\{x_1 = 0\}$ .

### 4.2.1 Condition de la droite sortante

On commence par traiter le cas où la droite  $\Upsilon$  sort du secteur, c'est-à-dire le cas  $\theta \in [0, \frac{\pi-\alpha}{2})$  (voir la définition 3.15 pour la notion de droite sortante).

Le lemme de Persson indique que le spectre essentiel de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$  est vide dans ce cas-là. Nous allons raffiner cela en montrant que l'opérateur est à résolvante compacte. Nous avons d'abord le résultat suivant (voir [Ada75]) :

**Proposition 4.7.** *Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  dont le bord est lipschitzien, alors l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte.*

Nous rappelons que le domaine de la forme quadratique associée à  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est noté  $H_{\underline{\mathbf{A}}, V}^1(\mathcal{S}_\alpha)$ . La norme induite par la forme quadratique est définie dans la section B.2. Dans le cas où l'ouvert  $\Omega$  est borné, on a le résultat suivant :

**Proposition 4.8.** *Si  $\Omega$  est un domaine borné et si  $\mathbf{A}$  et  $V$  sont réguliers sur  $\overline{\Omega}$ , alors les normes associées aux espaces  $H^1(\Omega)$  et  $H_{\underline{\mathbf{A}}, V}^1(\Omega)$  sont équivalentes.*

*Preuve :* C'est une conséquence directe du fait que  $\mathbf{A}$  et  $V$  sont bornés sur  $\Omega$ . □

Nous aurons besoin d'un lemme sur le domaine de forme :

**Lemme 4.9.** *Nous notons  $V = V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  le potentiel électrique. L'injection du domaine de forme  $H_{\underline{\mathbf{A}}, V}^1(\mathcal{S}_\alpha)$  dans  $L^2(\mathcal{S}_\alpha)$  est compacte.*

*Preuve :* Soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $(u_n)_n$  une suite de  $H_{\underline{\mathbf{A}}, V}^1(\mathcal{S}_\alpha)$  vérifiant  $\|u_n\|_{H_{\underline{\mathbf{A}}, V}^1(\mathcal{S}_\alpha)} = 1$ . Nous allons en extraire une sous-suite qui converge dans  $L^2(\mathcal{S}_\alpha)$ . Nous rappelons que  $B_m$



désigne la boule ouverte de centre l'origine et de rayon  $m$ . On définit pour  $m \in \mathbb{Z}$  le secteur tronqué :

$$\mathcal{S}_{\alpha,m} = \mathcal{S}_{\alpha} \cap B_m .$$

Par restriction, la suite  $(u_n)_n$  permet de définir une suite bornée de  $H_{\mathbf{A},V}^1(\mathcal{S}_{\alpha,m})$ . En utilisant les propositions 4.7 et 4.8, on peut alors trouver une extractrice  $\Phi_m$  et une fonction  $v_m$  de  $H_{\mathbf{A},V}^1(\mathcal{S}_{\alpha,m})$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{\Phi_m(n)} - v_m\|_{L^2(\mathcal{S}_{\alpha,m})} = 0 .$$

En particulier,  $(u_{\Phi_m(n)})_n$  est une suite de Cauchy de  $L^2(\mathcal{S}_{\alpha,m})$ . Le procédé d'extraction diagonale fournit une nouvelle extractrice

$$\Psi_m = \Phi_m \circ \dots \circ \Phi_1 ,$$

puis la fonction  $w_n = u_{\Psi(n)}$ . Nous allons vérifier que  $(w_n)_n$  est une suite de Cauchy de  $L^2(\mathcal{S}_{\alpha})$ . Soit donc  $\epsilon > 0$ , et soient  $p \leq q$  deux entiers, on sait qu'il existe  $q' > p$  tel que  $\Psi_q(q) = \Psi_p(q')$ . On a :

$$\begin{aligned} \|w_p - w_q\|_{L^2(\mathcal{S}_{\alpha})}^2 &= \int_{\mathcal{S}_{\alpha,p}} |u_{\Psi_p(p)} - u_{\Psi_q(q)}|^2 + \int_{\mathcal{S}_{\alpha} \setminus \mathcal{S}_{\alpha,p}} |u_{\Psi_p(p)} - u_{\Psi_q(q)}|^2 \\ &\leq \int_{\mathcal{S}_{\alpha,p}} |u_{\Psi_p(p)} - u_{\Psi_p(q')}|^2 + \left( \sup_{\mathcal{S}_{\alpha} \setminus \mathcal{S}_{\alpha,p}} \frac{1}{V} \right) \int_{\mathcal{S}_{\alpha} \setminus \mathcal{S}_{\alpha,p}} V |u_{\Psi_p(p)} - u_{\Psi_q(q)}|^2 . \end{aligned}$$

Or on a

$$\int_{\mathcal{S}_{\alpha} \setminus \mathcal{S}_{\alpha,p}} V |u_{\Psi_p(p)} - u_{\Psi_q(q)}|^2 \leq \int_{\mathcal{S}_{\alpha}} V |u_{\Psi_p(p)} - u_{\Psi_q(q)}|^2 \leq \|u_{\Psi_p(p)} - u_{\Psi_q(q)}\|_{H_{\mathbf{A},V}^1(\mathcal{S}_{\alpha})}^2 \leq 2 .$$

On a donc

$$\|w_p - w_q\|_{L^2(\mathcal{S}_{\alpha})}^2 \leq \int_{\mathcal{S}_{\alpha,p}} |u_{\Psi_p(p)} - u_{\Psi_p(q')}|^2 + \sup_{\mathcal{S}_{\alpha} \setminus \mathcal{S}_{\alpha,p}} \frac{2}{V} .$$

L'hypothèse de la droite sortante assure que

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \inf_{\mathcal{S}_{\alpha,r}} V = +\infty ,$$

on peut donc choisir  $p$  suffisamment grand pour que ces deux termes soient inférieurs à  $\frac{\epsilon}{2}$ . On a donc montré :

$$\forall \epsilon > 0, \exists P > 0, \forall q \geq p \geq P, \quad \|w_p - w_q\|_{L^2(\mathcal{S}_{\alpha})} < \epsilon . \quad (4.6)$$

Puisque  $L^2(\mathcal{S}_{\alpha})$  est complet, on en déduit que  $(w_n)_n$  converge dans  $L^2(\mathcal{S}_{\alpha})$ , et le résultat est démontré.  $\square$

On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 4.10.** *On suppose que la droite  $\Upsilon$  vérifie la condition de la droite sortante, c'est-à-dire  $\gamma > 0$  et  $0 \leq \theta < \frac{\pi-\alpha}{2}$ . Alors l'opérateur  $P_{\mathbf{A},\mathcal{S}_{\alpha}} + V_{\gamma,\theta,\tau}$  est à résolvante compacte et  $\underline{s}(\gamma,\theta;\alpha,\tau)$  est une valeur propre de multiplicité finie pour  $P_{\mathbf{A},\mathcal{S}_{\alpha}} + V_{\gamma,\theta,\tau}$  pour tout réel  $\tau$ .*

On rappelle (voir la preuve de la proposition 3.18) que le domaine de l'opérateur  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$  ne dépend pas de  $\tau$ . Sous une hypothèse de simplicité on a la formule de Feynman-Hellmann énoncée dans la proposition A.5 qui s'applique :

**Corollaire 4.11.** *Supposons qu'en  $\tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau_0)$  est une valeur propre simple pour l'opérateur  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau_0}$ . Alors dans un voisinage de  $\tau_0$  la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  est analytique et on a*

$$\partial_\tau \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau_0) = -2 \int_{\mathcal{S}_\alpha} (x_1 \sin \gamma \cos \theta - x_2 \sin \gamma \sin \theta - \tau_0) |u_{\tau_0}|^2 dx_1 dx_2. \quad (4.7)$$

où  $u_{\tau_0}$  est un vecteur propre normé associé à la valeur propre  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau_0)$ .

## 4.2.2 Condition de la droite entrante

Nous traitons dans cette section le cas d'un champ magnétique entrant dans le dièdre et qui n'est pas contenu dans une des faces : on suppose donc que  $\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . La situation est alors la suivante : la droite  $\Upsilon$  (voir la définition 3.17) entre dans le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  et n'est parallèle à aucun des bords de  $\mathcal{S}_\alpha$  (voir la figure 3.6). La situation est proche de celle rencontrée pour l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  dans le chapitre 2 : l'ensemble des zéros d'annulation du potentiel électrique est une demi-droite.

En vue d'utiliser le lemme de Persson nous regardons l'énergie de fonctions dont le support est contenu dans le complémentaire d'une boule de rayon grand. Pour simplifier ce qui suit, nous notons  $\mathcal{Q}_\tau$  la forme quadratique associée à l'opérateur  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$ . Nous rappelons aussi que  $\mathbb{C}B_r$  désigne le complémentaire de la boule de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Nous rappelons finalement que  $\mathcal{K}_r(\mathcal{S}_\alpha)$  désigne l'ensemble des fonctions sur  $\mathcal{S}_\alpha$  infiniment dérivables à support compact dans  $\mathbb{C}B_r$  (voir (B.9)).

**Lemme 4.12.** *On suppose que le champ est entrant, c'est-à-dire  $\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Alors il existe des constantes  $C > 0$  et  $R > 0$  telles que pour tout  $r > R$  et pour toute fonction  $\Phi \in \mathcal{K}_r(\mathcal{S}_\alpha)$  normalisée, on a*

$$\mathcal{Q}_\tau(\Phi) \geq 1 - \frac{C}{r^2}. \quad (4.8)$$

*Preuve :* Soit  $\delta \in (0, \frac{\alpha}{2})$ . On découpe  $\mathcal{S}_\alpha$  en sous-secteurs (voir la figure 4.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, x_2 \geq 0, x_1 \tan(\frac{\alpha}{2} - \delta) < x_2 < x_1 \tan \frac{\alpha}{2}\}, \\ \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, x_2 < 0, x_1 \tan(-\frac{\alpha}{2}) < x_2 < x_1 \tan(-\frac{\alpha}{2} + \delta)\}, \\ \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^3 &= \mathcal{S}_\alpha \setminus (\mathcal{S}_{\alpha, \delta}^1 \cup \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^2). \end{aligned}$$

On choisit  $\delta = \frac{1}{2}(\frac{\pi+\alpha}{2} - \theta)$ , de sorte que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\mathcal{S}_{\alpha, \delta}^1 \cap \mathbb{C}(B_r)} V_{\gamma, \theta, \tau} = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\mathcal{S}_{\alpha, \delta}^2 \cap \mathbb{C}(B_r)} V_{\gamma, \theta, \tau} = +\infty.$$

Donc on a :

$$\exists R > 0, \forall r > R, \forall i = 1, 2, \quad \inf_{\mathcal{S}_{\alpha, \delta}^i \cap \mathbb{C}B_r} V_{\gamma, \theta, \tau} > 1.$$

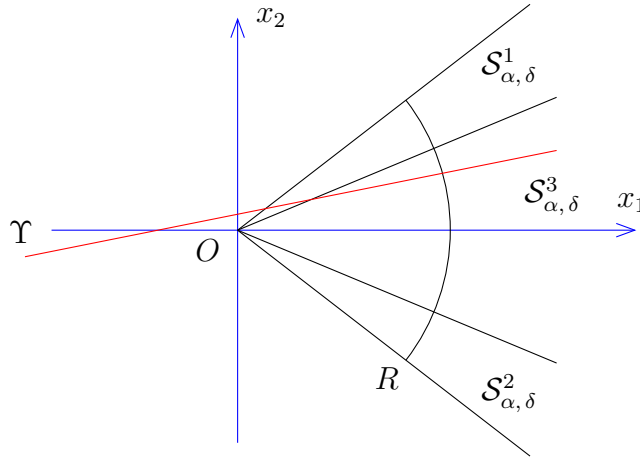


FIGURE 4.2 – Découpage en sous-secteurs.

Nous prenons maintenant  $r > R$  et  $\Phi \in \mathcal{K}_r(\mathcal{S}_\alpha)$  une fonction normalisée de  $\mathcal{K}_r$  qui vérifie donc  $\text{supp}(\Phi) \subset \mathbb{C}B_r$ . Notons  $W = \text{supp}(\Phi)$ . Nous commençons par supposer que  $W$  est inclus dans un des sous-secteurs  $\mathcal{S}_{\alpha, \delta}^i$ . On peut alors minorer l'énergie de  $\Phi$  comme le montre l'analyse suivante :

- Cas 1 : Supposons  $W \subset \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^1$ . On a :

$$\mathcal{Q}_\tau(\Phi) \geq \int_W V_{\gamma, \theta, \tau} |\Phi|^2 \geq \left( \inf_{\mathcal{S}_{\alpha, \delta}^1 \cap \mathbb{C}(B_r)} V_{\gamma, \theta, \tau} \right) \int_W |\Phi|^2 > 1.$$

- Cas 2 : Supposons  $W \subset \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^2$ , alors la minoration du premier cas reste valable.
- Cas 3 : Supposons  $W \subset \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^3$ . Notons que  $\Phi$  se prolonge en une fonction de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , il découle alors de la proposition 4.1 que  $\mathcal{Q}_\tau(\Phi) \geq 1$ .

Il nous reste à traiter le cas général. Nous allons nous ramener aux cas précédents grâce à une partition du secteur, et une formule IMS nous permettra de conclure. Nous notons  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha$  un point du secteur et  $\arg(x) \in (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$  son argument. Soit  $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2) \in \overline{\mathcal{S}_\alpha}, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  la portion compacte du cercle unité comprise dans  $\mathcal{S}_\alpha$ . Pour construire une partition du secteur adaptée à la figure 4.2, on construit une partition de  $\mathcal{C}$  : soient  $\chi_1, \chi_2$  et  $\chi_3$  des fonctions infiniment dérivables sur  $\mathcal{C}$  vérifiant :

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, 3, & 0 \leq \chi_i \leq 1, \\ \chi_1(x) = 1 \text{ si } \arg(x) \in (\frac{\alpha}{2} - \delta, \frac{\alpha}{2}) \text{ et } \chi_1(x) = 0 \text{ si } \arg(x) \in (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} + \delta), \\ \chi_2(x) = 0 \text{ si } \arg(x) \in (\frac{\alpha}{2} - \delta, \frac{\alpha}{2}) \text{ et } \chi_2(x) = 1 \text{ si } \arg(x) \in (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} + \delta), \\ \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = 1. \end{cases}$$

On étend les fonctions  $\chi_i$  sur  $\mathcal{S}_\alpha$  en posant

$$\forall x \in \mathcal{S}_\alpha, \quad \chi_i(x) = \chi_i\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad (4.9)$$

autrement dit les troncatures sur  $\mathcal{S}_\alpha$  sont des dilatations de troncatures de  $\mathcal{C}$ . Les fonctions  $\chi_1, \chi_2$  et  $\chi_3$  ainsi définies sont clairement des fonctions infiniment dérivables sur  $\mathcal{S}_\alpha$ . Elles

vérifient de plus :

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, 3, & 0 \leq \chi_i \leq 1, \\ \chi_1(x_1, x_2) = 1 \text{ sur } \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^1 \text{ et } \chi_1(x_1, x_2) = 0 \text{ sur } \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^2, \\ \chi_2(x_1, x_2) = 1 \text{ sur } \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^2 \text{ et } \chi_2(x_1, x_2) = 0 \text{ sur } \mathcal{S}_{\alpha, \delta}^1, \\ \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = 1. \end{cases}$$

Nous introduisons

$$C_i = \sup_c |\nabla \chi_i|.$$

On a en notant  $d_x f$  la différentielle d'une fonction  $f$  au point  $x$ , et  $n$  la fonction définie sur  $\mathcal{S}_\alpha$  par  $n(x) = \frac{x}{|x|}$ , on a d'après (4.9) :

$$d_x \chi_i = d_{n(x)} \chi_i \circ d_x n.$$

Un calcul rapide nous montre que

$$\exists C_0 > 0, \forall x \in \mathcal{S}_\alpha, \quad \|d_x n\|_\infty \leq \frac{C_0}{|x|}.$$

De plus,  $d_x \chi_i = \nabla \chi_i(x)$ , et donc on a

$$\forall x \in \mathcal{S}_\alpha, \quad |\nabla \chi_i(x)| \leq \frac{C_0 C_i}{|x|}. \quad (4.10)$$

Finalement, en notant  $C = \max_i (C_0 C_i)$  et en utilisant  $W \subset \mathbb{B}_r$  on a la majoration suivante :

$$\forall i = 1, 2, 3, \forall x \in W, \quad |\nabla \chi_i(x)|^2 \leq \frac{C^2}{r^2}. \quad (4.11)$$

On utilise alors la formule IMS (B.8) :

$$\mathcal{Q}_\tau(\Phi) = \sum_i \mathcal{Q}_\tau(\chi_i \Phi) - \sum_i \int_W |\nabla \chi_i|^2 |\Phi|^2. \quad (4.12)$$

Les études réalisées aux trois premiers cas nous permettent d'écrire :

$$\forall i = 1, 2, 3, \quad \mathcal{Q}_\tau(\chi_i \Phi) \geq \int_W \chi_i^2 |\Phi|^2,$$

et donc

$$\sum_i \mathcal{Q}_\tau(\chi_i \Phi) \geq \int_W |\Phi|^2 = 1.$$

On a donc grâce à (4.11) et (4.12) :

$$\mathcal{Q}_\tau(\Phi) \geq 1 - \frac{C^2}{r^2}. \quad (4.13)$$

□

Nous construisons maintenant un quasi-mode supporté “à l'infini” dont l'énergie est proche de 1 :

**Lemme 4.13.** *Nous supposons toujours  $\frac{\pi-\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Soit  $\epsilon > 0$ , nous allons montrer :*

$$\exists R > 0, \forall r > R, \exists \Phi \in \mathcal{K}_r(\mathcal{S}_\alpha), \quad \mathcal{Q}_\tau(\Phi) \leq 1 + \epsilon. \quad (4.14)$$

*Preuve :* La proposition 4.1 et le principe du min-max appliqués à l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathbb{R}^2} + V_{\gamma, \theta, \tau}$  nous donnent l'existence d'une fonction  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  normalisée telle que :

$$\langle (P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathbb{R}^2} + V_{\gamma, \theta, \tau}) u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 1 + \epsilon.$$

Nous allons translater  $u$  de manière à fabriquer une fonction test dont le support est inclus dans  $\mathcal{S}_\alpha \cap \mathbb{C}B_r$ . Soit donc  $\mathbf{t} = (\sin \theta, \cos \theta)$  un vecteur directeur de  $\Upsilon$  et  $u_r$  la fonction définie par

$$u_r(x_1, x_2) = \exp(ir \cos \gamma(x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta)) u(x_1 - r \sin \theta, x_2 - r \cos \theta).$$

Notons que

$$\text{supp}(u_r) = \text{supp}(u) + r\mathbf{t},$$

ainsi puisque la droite  $\Upsilon$  entre dans le secteur, on a :

$$\exists R > 0, \forall r > R, \quad \text{supp}(u_r) \subset \mathcal{S}_\alpha \cap \mathbb{C}B_r.$$

On remarque que le potentiel est invariant par translation selon  $\mathbf{t}$  :

$$\forall r > R, \quad V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1 - r \sin \theta, x_2 - r \cos \theta) = V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1, x_2).$$

On utilise la proposition B.3 pour conclure :

$$\mathcal{Q}_\tau(u_r) = \langle (P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathbb{R}^2} + V_{\gamma, \theta, \tau}) u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 1 + \epsilon, \quad (4.15)$$

et le lemme est démontré en posant  $\Phi = u_r$ .  $\square$

**Proposition 4.14.** *Dans le cas d'une droite entrant strictement dans le secteur, c'est-à-dire lorsque  $\frac{\pi-\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , on a*

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) = 1. \quad (4.16)$$

*Preuve :* On applique le lemme de Persson en utilisant les lemmes (4.12) et (4.13).  $\square$

### 4.2.3 Condition de la droite tangente

Nous traitons pour finir le cas où le champ magnétique est contenu dans une des faces du dièdre (sans être tangent à l'arête). On a alors  $\theta = \frac{\pi-\alpha}{2}$  et la droite  $\Upsilon$  est parallèle au bord supérieur du secteur (voir la figure 3.5).

### Cas général

Cette fois-ci, le spectre essentiel de l'opérateur  $P_{\underline{A}, S_\alpha} + V_{\gamma, \frac{\alpha-\pi}{2}, \tau}$  dépend du paramètre de Fourier  $\tau$  :

**Proposition 4.15.** *Soit  $\alpha \in (0, \pi)$  et  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , alors on a*

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) = \underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau) . \quad (4.17)$$

*Preuve :* L'idée de la preuve est la même que celle de la proposition 4.14, c'est pourquoi nous nous contentons d'en rappeler les grandes lignes. Le lemme 4.13 se démontre en utilisant un quasi-mode à support compact de l'opérateur  $P_{\underline{A}, S_\alpha} + V_{\gamma, 0, \tau}$  dont l'énergie est proche de la valeur  $\underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau)$ , on lui applique une rotation puis une translation afin d'obtenir une fonction dont le support est dans  $S_\alpha \cap \mathbb{C}B_r$ . Pour la majoration, nous découpons le secteur en sous-secteurs comme dans le lemme 4.12, et nous utilisons l'opérateur modèle étudié dans la proposition 4.4. Le lemme de Persson permet de conclure.  $\square$

Nous rappelons le résultat de la proposition 4.4 qui permet d'explicitier cette quantité pour  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\tau \in \mathbb{R}$  :

$$\underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau) = \inf_{\xi_2 \in \mathbb{R}} (\mu_1^N(\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma) + (\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2) . \quad (4.18)$$

Nous rappelons (voir la section 1.4) que

$$\mu_1^N(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \mu_1^N(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1 .$$

On peut calculer les valeurs limites du spectre essentiel  $\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau)$  quand  $\tau$  est grand :

**Proposition 4.16.** *On a pour  $(\gamma, \alpha) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times (0, \pi)$  :*

$$\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} +\infty .$$

*Preuve :* On suppose  $\tau < 0$ . On fait une disjonction selon le signe de  $\xi_2$  dans (4.18) :

- Si  $\xi_2 \geq 0$ , on a  $\mu_1^N(\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma) + (\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2 \geq \tau^2 \cos^2 \gamma$ .
- Si  $\xi_2 < 0$ , en utilisant la décroissance de  $t \mapsto \mu_1^N(t)$  sur  $(-\infty, 0)$ , on a

$$\mu_1^N(\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma) + (\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2 \geq \mu_1^N(\tau \sin \gamma) .$$

On a donc prouvé

$$\forall \tau \leq 0, \quad \underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) \geq \min(\mu_1^N(\tau \sin \gamma), \tau^2 \cos^2 \gamma) . \quad (4.19)$$

On conclut en utilisant  $\mu_1^N(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} +\infty$ .  $\square$

Lorsque le paramètre de Fourier tend vers  $+\infty$ , on a

**Proposition 4.17.** *On a pour  $(\gamma, \alpha) \in (0, \frac{\pi}{2}] \times (0, \pi)$  :*

$$\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 1 .$$

*Preuve :* On suppose  $\tau \geq 0$ . En prenant  $\xi_2 = \tau \cot \gamma$  dans (4.18), on a

$$\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) \leq \mu_1^N(\frac{\tau}{\sin \gamma}) < 1.$$

Pour montrer la minoration, on fait une disjonction de cas sur  $\xi_2$  selon que  $(\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma)^2$  soit grand ou pas :

- Si  $\xi_2 \notin [\tau \cot \gamma - \frac{1}{\sin \gamma}, \tau \cot \gamma + \frac{1}{\sin \gamma}]$ , on a  $(\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2 \geq 1$ .
- Si  $\xi_2 \in [\tau \cot \gamma - \frac{1}{\sin \gamma}, \tau \cot \gamma + \frac{1}{\sin \gamma}]$ , on a  $\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma \in [\frac{\tau}{\sin \gamma} - \cot \gamma, \frac{\tau}{\sin \gamma} + \cot \gamma]$ . Pour  $\tau$  suffisamment grand, cet intervalle est inclus dans  $[\xi_0, +\infty)$  et la croissance de  $t \mapsto \mu_1^N(t)$  sur  $[\xi_0, +\infty)$  donne l'existence d'un  $\tau_0 > 0$  tel que

$$\forall \tau > \tau_0, \forall \xi_2 \in [\tau \cot \gamma - \frac{1}{\sin \gamma}, \tau \cot \gamma + \frac{1}{\sin \gamma}], \quad \mu_1^N(\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma) \geq \mu_1^N(\frac{\tau}{\sin \gamma} - \cot \gamma).$$

On a donc montré

$$\exists \tau_0 > 0, \forall \tau > \tau_0, \quad \underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) \geq \mu_1^N(\frac{\tau}{\sin \gamma} - \cot \gamma).$$

On conclut en utilisant  $\mu_1^N(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$ . □

Grâce au corollaire 4.5, on a  $\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \xi_0 \sin \gamma) = \Theta_0$ . On déduit de (3.18) une majoration pour le bas du spectre de l'opérateur sur le dièdre :

**Corollaire 4.18.** *Dans le cas où le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est contenu dans l'une des faces du dièdre, on a :*

$$\forall \alpha \in (0, \pi], \forall \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad s(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha) \leq \Theta_0.$$

### Cas particulier d'un champ perpendiculaire à l'arête

Nous donnons des résultats dans le cas particulier  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  où le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire à l'arête du dièdre (cf la table 3.1). Dans ce cas là on déduit de la proposition 4.15 et de la formule (4.18) une relation explicite :

**Corollaire 4.19.** *Soit  $\alpha \in (0, \pi)$ , alors*

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \underline{s}_{\text{ess}}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) = \mu_1^N(\tau).$$

On peut préciser ce résultat pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  :

**Proposition 4.20.** *Dans le cas d'un secteur d'angle droit et d'une droite tangente, on a*

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \underline{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}, \tau) = \underline{s}_{\text{ess}}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}, \tau) = \mu_1^N(\tau).$$

*Preuve :* La démonstration se déduit directement de la preuve de [Pan02, proposition 7.1], c'est pourquoi nous nous contentons d'en donner les grandes lignes. On suppose donc  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\mathbf{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ . On a  $\underline{\mathbf{A}} = 0$  et l'opérateur s'écrit

$$P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = -\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \tau)^2.$$

On effectue le changement de variable associé à la rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . On est ramené à étudier la réalisation de Neumann de

$$-\partial_{u_1}^2 - \partial_{u_2}^2 + (u_1 - \tau)^2. \quad (4.20)$$

sur l'ouvert

$$\{u_1 > 0, u_2 > 0\}.$$

On utilise alors une technique de [Pan02] : un vecteur propre de l'opérateur (4.20) peut être symétrisé par rapport à l'axe  $\{u_2 = 0\}$  afin d'obtenir une fonction définie sur le demi-plan  $\{u_1 > 0\}$ . En utilisant les arguments de la preuve de la proposition 1.1, on constate que le bas du spectre de cet opérateur est le même que le bas du spectre de la réalisation de Neumann de  $-\Delta + (u_1 - \tau)^2$  sur le demi-plan  $\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, u_1 > 0\}$ . Par une transformée de Fourier partielle dans la variable  $u_2$ , on montre que le spectre de cet opérateur est  $[\mu_1^N(\tau), +\infty)$ , de plus il s'agit de spectre essentiel. On en déduit la proposition.  $\square$

On retrouve à partir de cette proposition le résultat (3.39) de [Pan02] pour le bas du spectre de l'opérateur sur un dièdre d'angle droit ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ). En combinant le corollaire 4.18 avec la minoration (3.43), on peut étendre cela en un résultat intéressant pour le bas du spectre de l'opérateur sur le dièdre dans le cas d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  perpendiculaire à l'arête et contenu dans une des faces :

**Théorème 4.21.** *On suppose que le champ magnétique est contenu dans une des faces du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  et perpendiculaire à l'arête du dièdre. Les coordonnées sphériques sont  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-\alpha}{2})$  (cf la table 3.1). On suppose aussi que l'angle d'ouverture du dièdre vérifie  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ . On a alors*

$$s(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha) = \Theta_0$$

*De plus cette valeur correspond à du spectre essentiel pour l'opérateur sur le secteur au sens suivant :*

$$s(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha) = \underline{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \xi_0) = \underline{s}_{\text{ess}}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \xi_0).$$

Des calculs numériques illustrent ce résultat sur la figure 4.10. On démontrera plus tard que si  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , on peut avoir une valeur propre inférieure à la valeur  $\Theta_0$ , y compris lorsque le champ magnétique est perpendiculaire à l'arête du dièdre.

#### 4.2.4 Synthèse des résultats pour le spectre essentiel de l'opérateur sur le secteur

La table 4.1 récapitule le spectre essentiel de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, S_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  selon la position de la droite  $\Upsilon$  par rapport au secteur  $S_\alpha$ . Nous avons donc montré l'existence de vecteurs propres pour le bas du spectre de  $P_{\mathbf{A}, S_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  dans le cas d'une droite sortante. Dans les autres cas, nous montrerons dans les chapitres suivants l'existence de spectre discret sous le spectre essentiel pour certaines valeurs des paramètres.



Champ magnétique $\mathbf{B}$	Coordonnées sphériques de $\mathbf{B}$	Droite $\Upsilon$ par rap- port au secteur $\mathcal{S}_\alpha$	$\mathfrak{S}_{\text{ess}}(P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau})$
Champ tangent à l'arête du dièdre	$\gamma = 0$	Non définie	$[\Theta_0 + \tau^2, +\infty)$
Champ non tangent à l'arête du dièdre	$\theta \in [0, \frac{\pi-\alpha}{2})$	Sortante	$\emptyset$
	$\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$	Entrante	$[1, +\infty)$
	$\theta = \frac{\pi-\alpha}{2}$	Tangente	$[\underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau), +\infty)$

TABLE 4.1 – Synthèse des résultats pour le spectre essentiel de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  sur le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  selon la géométrie du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  et du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

### 4.3 Calculs numériques pour un champ tangent

Nous montrons ici des calculs numériques pour le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  dans le cas où la droite  $\Upsilon$  d'annulation du potentiel est tangente au bord du secteur. Nous utilisons une notation du chapitre 1 : si  $s$  est une quantité spectrale, nous notons génériquement  $\check{s}$  un calcul numérique de cette quantité par éléments finis. Sauf mention explicite, les calculs ont été effectués avec le potentiel magnétique  $\underline{\mathbf{A}}^{\text{R}}$  (défini dans la sous-section 3.1.1). Nous renvoyons au chapitre C pour les notations Los et Tri correspondant aux domaines de calculs.

La figure 4.3 illustre la proposition 4.20 : on représente les valeurs de  $\tau \mapsto \check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  calculées par éléments finis pour un secteur d'angle droit ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) et un champ magnétique tangent perpendiculaire à l'arête :  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ . Il nous a fallu prendre un domaine de calcul de grande taille puisque les valeurs spectrales correspondent à du spectre essentiel. On a aussi tracé la fonction  $\tau \mapsto \mu_1^{\text{N}}(\tau)$  dont les valeurs ont été calculées dans le chapitre 1. Ces deux fonctions semblent coïncider, ce qui corrobore la proposition 4.20.

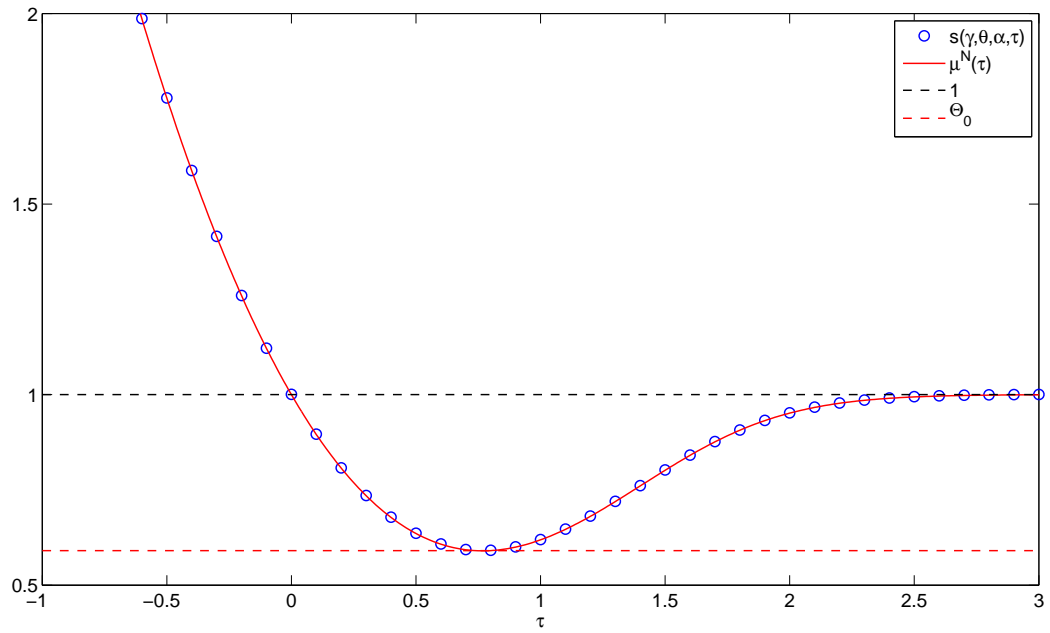


FIGURE 4.3 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .  $\check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\tau = \frac{k}{10}$ ,  $-10 \leq k \leq 30$  comparé à  $\mu_1^N(\tau)$ ,  $\Theta_0$  et 1. Domaine de calcul :  $\text{Los}(20, 80, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

Sur la figure 4.4 on garde les mêmes valeurs de  $\alpha$  et  $\theta$  mais on prend  $\gamma = \frac{\pi}{10}$  : le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est tangent et proche de l'arête du dièdre. On a aussi tracé la constante  $\Theta_0$  et la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  à partir de la formule

$$\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) = \inf_{\xi_2 \in \mathbb{R}} (\mu_1^N(\xi_2 \cos \gamma + \tau \sin \gamma) + (\xi_2 \sin \gamma - \tau \cos \gamma)^2)$$

et des calculs du chapitre 1. On constate alors que  $\check{\underline{s}}(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}, \tau)$  semble correspondre à du spectre discret et peut descendre sous la valeur  $\Theta_0$ . On a aussi tracé la constante  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha)$ , qui vaut ici  $\sigma(\frac{\pi}{10})$ . Les valeurs de  $\check{\underline{s}}(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}, \tau)$  semblent converger vers cette constante pour  $\tau$  grand. Nous démontrerons dans le chapitre suivant que  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  converge effectivement vers la valeur  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha)$  pour  $\tau$  grand (voir le théorème 5.13).

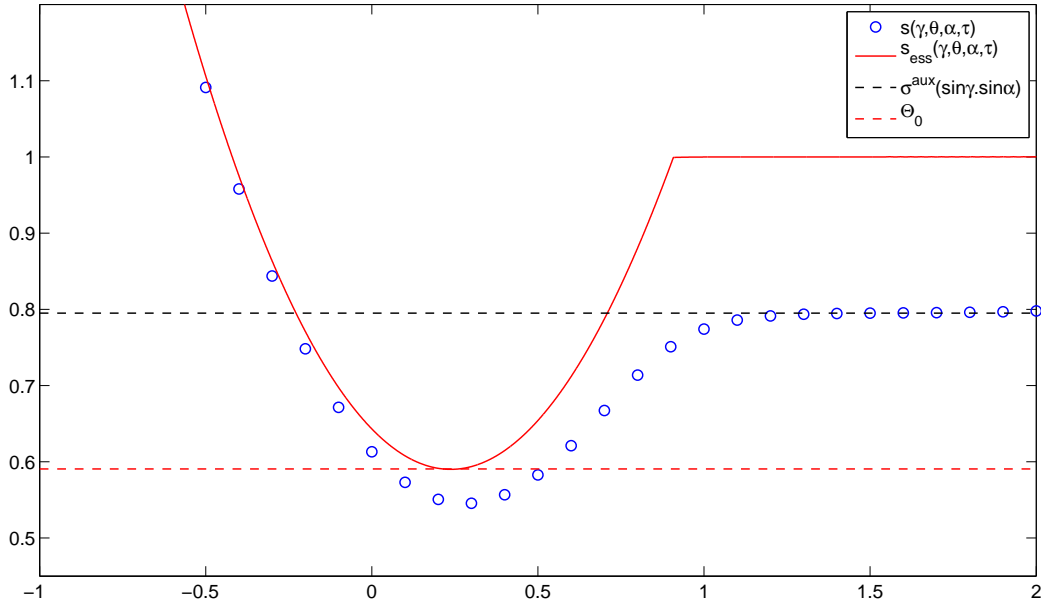


FIGURE 4.4 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{10}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .  $\check{\underline{s}}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\tau = \frac{k}{10}$ ,  $-10 \leq k \leq 20$  comparé à  $\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$ ,  $\Theta_0$  et  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha)$ . Domaine de calcul :  $\text{Tri}(41, 14, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ .

Sur les figures 4.5 et 4.6, des vecteurs propres associés aux valeurs propres de la figure 4.4 sont représentés pour  $\tau = \frac{k}{2}$  avec  $0 \leq k \leq 4$ . Sur la figure 4.5, on a représenté de haut en bas : le module, le logarithme en base 10 et la phase modulo  $\pi$  des vecteurs propres. La phase modulo  $\pi$  est obtenue par la formule (C.1). Le logarithme a été seuillé pour des valeurs inférieures à  $-13$ . On a aussi tracé la droite  $\Upsilon$  d'annulation du potentiel. On constate que les vecteurs propres se concentrent le long de cette droite. L'échelle logarithmique permet de voir des minima locaux du module, de plus ces minima semblent correspondre avec des singularités de la phase. Nous pensons que ces points sont des racines du vecteur propre. Nous reviendrons sur ce phénomène dans le chapitre 7. Sur la figure 4.6, nous avons représenté le logarithme du module seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . La phase a été fixée à 0 là où le module est inférieur à  $10^{-7}$ .

Il est possible de choisir pour le calcul un potentiel magnétique qui s'annule le long de la droite  $\Upsilon$ . Nous prenons  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4})$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Sur la figure 4.7 nous réalisons le calcul pour  $\tau = 0$  en choisissant comme potentiel magnétique

$$\underline{\mathbf{A}}^\Upsilon(x_1, x_2) = (-x_2 \cos \gamma + x_1 \cos \gamma, 0) \quad (4.21)$$

qui vérifie bien  $\underline{\mathbf{A}}^\Upsilon \in \mathcal{A}(\cos \gamma)$ . Nous comparons le calcul fait pour le potentiel  $\underline{\mathbf{A}}^\Upsilon$  avec celui obtenu pour le potentiel  $\underline{\mathbf{A}}^R$ . Sur la figure 4.7(a) on constate que le vecteur propre calculé avec la jauge  $\underline{\mathbf{A}}^\Upsilon$  est moins concentré que celui de la figure 4.8(a). La valeur propre obtenue pour un calcul avec le potentiel  $\underline{\mathbf{A}}^\Upsilon$  vaut 0.61207 contre 0.61274 pour un calcul avec la jauge  $\underline{\mathbf{A}}^R$ . Nous rappelons que les deux potentiels diffèrent d'un gradient :

$$\underline{\mathbf{A}}^\Upsilon - \underline{\mathbf{A}}^R = \nabla \phi_{R, \Upsilon} \quad (4.22)$$

avec  $\phi_{R, \Upsilon}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 \cos \gamma$ . Nous rappelons aussi que les vecteurs propres de  $P_{\underline{\mathbf{A}}^\Upsilon, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  sont obtenus à partir de ceux de  $P_{\underline{\mathbf{A}}^R, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  par multiplication par  $e^{i\phi_{R, \Upsilon}}$  (cf la proposition B.2). Sur la figure 4.8(b) nous représentons (modulo  $\pi$ ) la phase des vecteurs propres calculés avec le potentiel  $\underline{\mathbf{A}}^R$  à laquelle on a ajouté  $\phi_{R, \Upsilon}$ . On constate que le résultat ressemble à la phase représentée sur la figure 4.7(b).

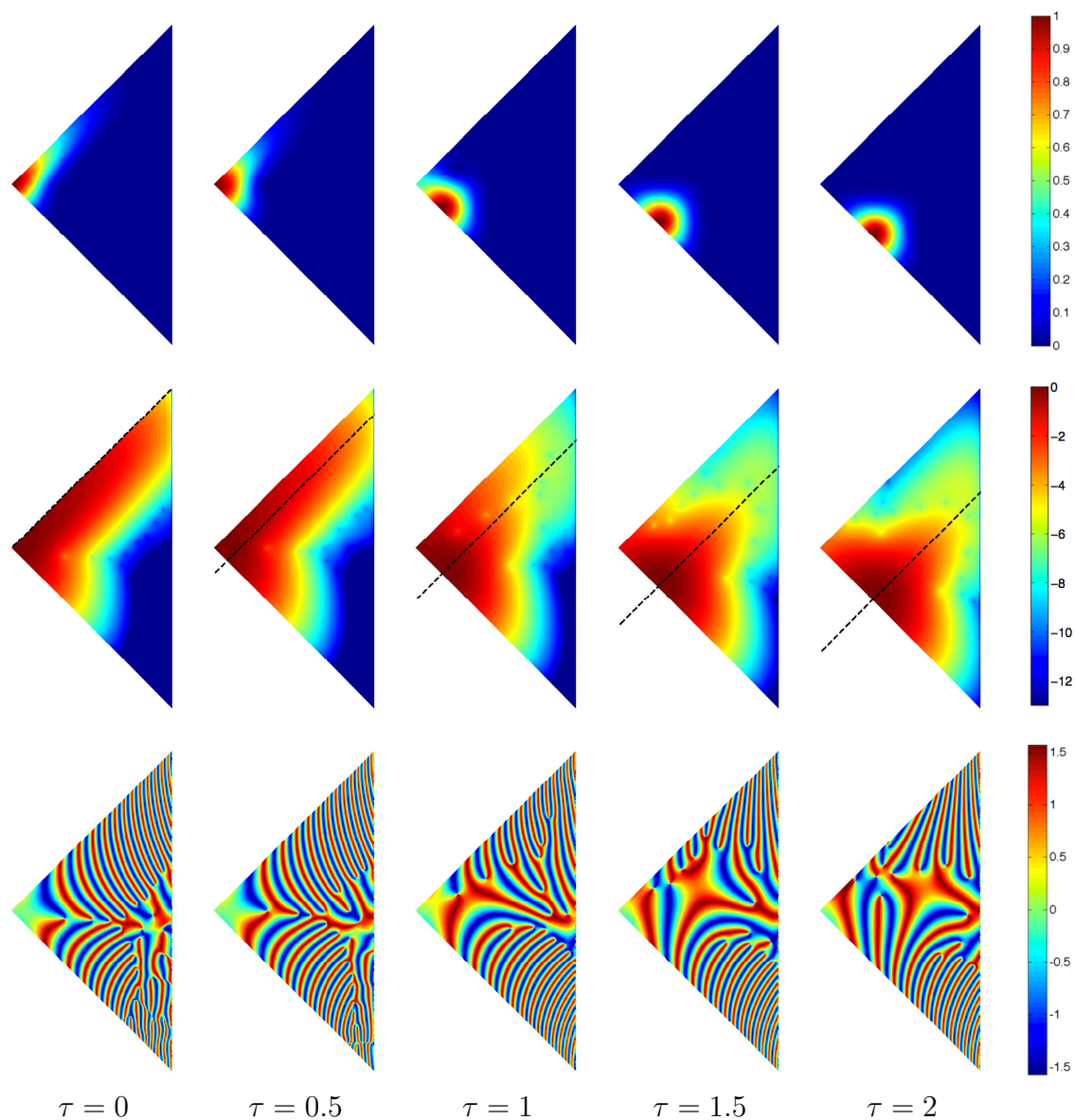


FIGURE 4.5 – Valeur des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{10}$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . De haut en bas : le module, le logarithme en base 10 du module et la phase modulo  $\pi$  du vecteur propre associé à  $\underline{\xi}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  pour  $\tau = \frac{k}{2}$ ,  $0 \leq k \leq 4$ . Logarithme seuillé pour des valeurs inférieures à  $-13$  et on a tracé la droite  $\Upsilon$  sur le logarithme du module. Potentiel magnétique choisi :  $\underline{\mathbf{A}}^R$ . Domaine de calcul :  $\text{Tri}(41, 14, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ .

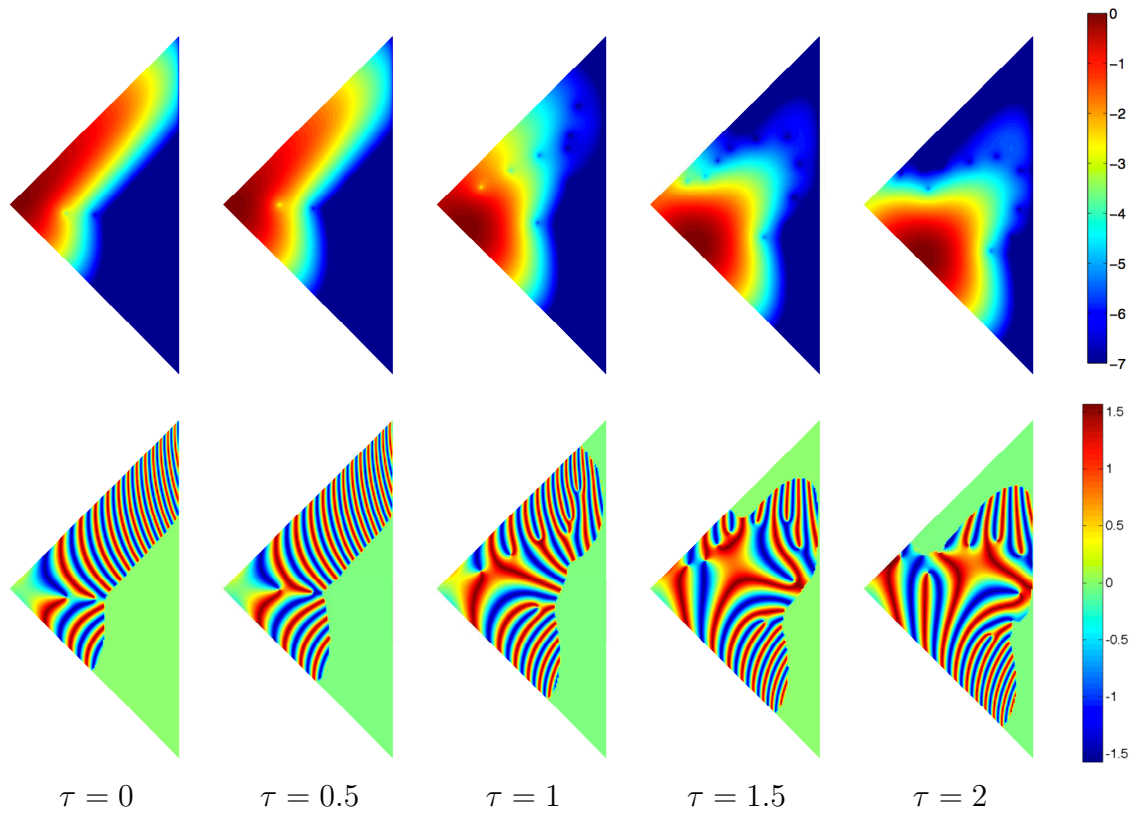


FIGURE 4.6 – Mêmes calculs que sur la figure 4.5. Le logarithme du module a été seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$  et la phase a été fixée à 0 là où le module est inférieur à  $10^{-7}$ .

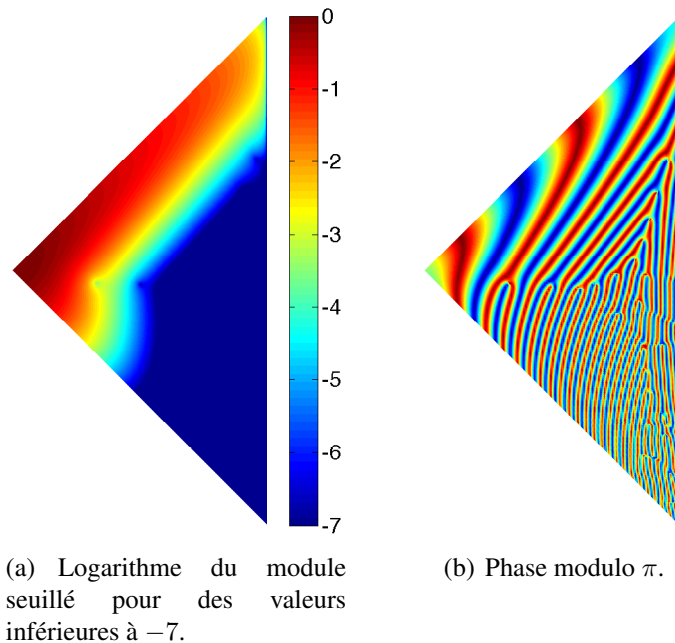


FIGURE 4.7 – Valeur des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{10}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\tau = 0$ . Domaine de calcul :  $\text{Tri}(41, 14, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . Potentiel magnétique choisi :  $\underline{\mathbf{A}}^\Upsilon$  (défini en (4.21)).

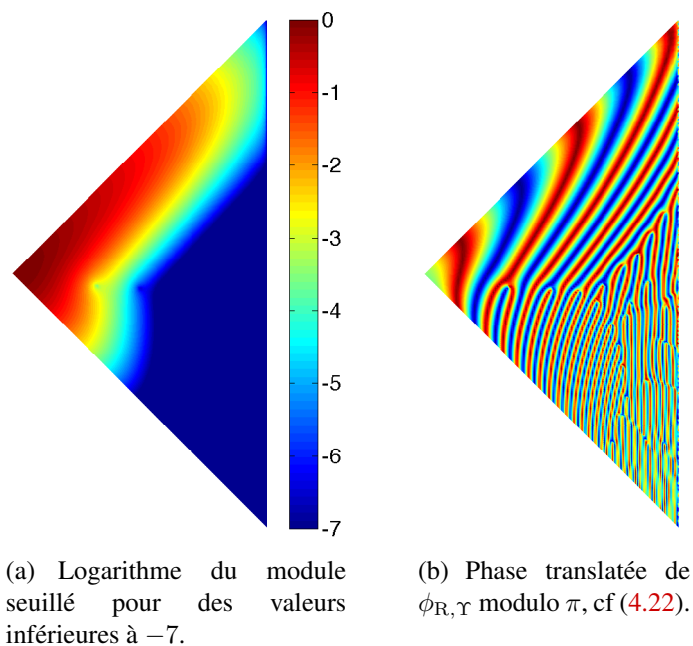


FIGURE 4.8 – Valeur des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{10}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\tau = 0$ . Domaine de calcul :  $\text{Tri}(41, 14, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . Potentiel magnétique choisi :  $\underline{\mathbf{A}}^R$ .

Sur la figure 4.9 on a calculé  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  pour  $\alpha = \frac{4\pi}{5}$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}$  de coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10})$ . On a pris comme valeurs du paramètre  $\tau = \frac{k}{10}$ ,  $-5 \leq k \leq 30$ . Puisque certaines valeurs spectrales semblent être situées dans le spectre essentiel, nous avons pris un domaine de calcul plus grand, les vecteurs propres calculés n'étant pas localisés. On a aussi tracé  $\tau \mapsto \mu_1^N(\tau)$  et la constante  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha)$  ici égale à  $\sigma_1(\frac{\pi}{5})$ . Le théorème 5.13 permettra d'identifier cette constante comme la limite de la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5}, \tau)$  quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ .

On constate que pour certaines valeurs de  $\tau$  on a l'inégalité  $\check{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5}, \tau) < \mu_1^N(\tau)$  : la valeur  $\underline{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5}, \tau)$  semble alors correspondre à du spectre discret pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . Nous notons

$$\tau_0 = \sup\{\tau_* \in \mathbb{R}, \forall \tau > \tau_*, \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) < \mu_1^N(\tau)\}$$

et  $\check{\tau}_0$  une approximation numérique de cette quantité. On constate que pour  $\tau < \check{\tau}_0$  on semble avoir  $\check{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5}, \tau) = \underline{s}_{\text{ess}}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10}; \frac{4\pi}{5}, \tau)$ . La proposition 4.20 prouve que  $\tau_0 \in ]\xi_0, +\infty]$ . Le corollaire 5.15 prouvera que  $\tau_0$  est un réel fini.

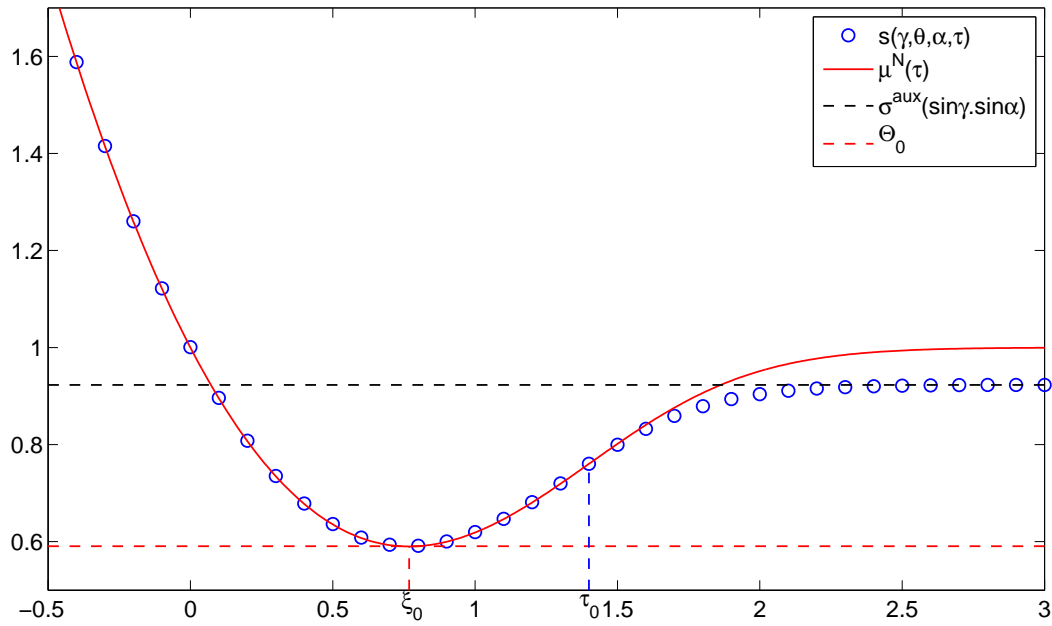


FIGURE 4.9 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{10}$  et  $\alpha = \frac{4\pi}{5}$ .  $\check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\tau = \frac{k}{10}$ ,  $-5 \leq k \leq 30$  comparé à  $\mu_1^N(\tau)$ ,  $\Theta_0$  et  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha)$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(20, 115, \frac{4\pi}{5})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_6$ .



En nous inspirant de la relation fondamentale (3.18), nous définissons

$$\check{s}(\gamma, \theta; \alpha) = \inf_{\tau} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) . \quad (4.23)$$

Sur la figure 4.10 nous calculons  $\check{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-\alpha}{2}, \alpha)$  pour  $\alpha = k\frac{\pi}{20}$  avec  $1 \leq k \leq 19$ . Pour chaque valeur de  $\alpha$  nous adaptons l'échantillonnage du paramètre  $\tau$  et le choix du maillage pour le calcul de  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  et nous utilisons 4.23. Nous constatons que pour  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ , on semble avoir  $\check{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi-\alpha}{2}, \alpha) = \Theta_0$ . Ce calcul illustre le théorème 4.21.

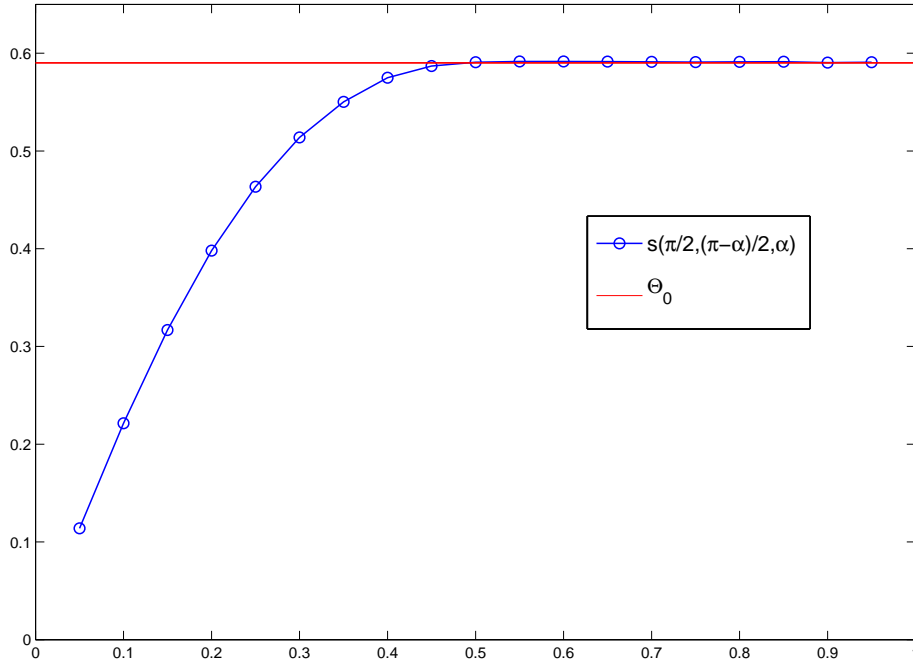


FIGURE 4.10 – Valeur du paramètre :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ .  $\check{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha)$  selon  $\vartheta := \frac{\alpha}{\pi}$  pour  $\vartheta = \frac{k}{20}$ ,  $1 \leq k \leq 19$ .

## 4.4 Concentration des vecteurs propres

Nous donnons des estimations d'Agmon qui indiquent la concentration des vecteurs propres de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . On suppose dans cette section que  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est une valeur propre de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  situé sous le spectre essentiel. Nous avons vu que cette hypothèse est toujours vérifiée dans le cas d'un champ sortant (proposition 4.10). Dans le cas d'un champ entrant, le spectre essentiel vaut 1 et la proposition 5.9 du prochain chapitre montre que cette hypothèse est vérifiée dès que  $\tau$  est assez grand. Nous notons  $u_{\mathbf{B}, \alpha, \tau}$  un vecteur propre associé à  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$ . La décroissance des fonctions propres “à

l'infini" est classique pour un vecteur propre associé à une valeur propre sous le spectre essentiel (voir [Bon05, théorème 7.1] par exemple) :

**Proposition 4.22.** *Nous notons  $x = (x_1, x_2)$  un point du plan. Il existe deux constantes  $\delta$  et  $C_1$  strictement positives (qui dépendent des paramètres  $(\mathbf{B}, \tau, \alpha)$ ) telles que*

$$\|e^{\delta|x|}u_{\mathbf{B},\alpha,\tau}\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)} < C_1 .$$

La démonstration de la proposition suivante se fait exactement de la même manière que celle du théorème 2.18 :

**Proposition 4.23.** *Soit  $d_\Upsilon$  la distance à la droite  $\Upsilon$  d'annulation du potentiel :*

$$d_\Upsilon(x_1, x_2) := |x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau| .$$

*Pour tout  $\delta < \frac{1}{2}$  il existe une constante  $C_2(\mathbf{B}, \tau, \alpha, \delta)$  telle que*

$$\|e^{\delta d_\Upsilon^2}u_{\mathbf{B},\alpha,\tau}\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)} < C_2(\mathbf{B}, \tau, \alpha, \delta) .$$

Dans le théorème 2.18, la constante  $K(\beta)$  ne dépend pas des paramètres. De même, dans le cas d'un champ sortant, on peut choisir la constante indépendamment de  $\alpha$  : soit  $\alpha_0 \in (0, \pi)$  tel que pour tout  $\alpha \in (0, \alpha_0]$ ,  $\Upsilon$  vérifie la condition de la droite sortante. Alors on peut trouver une constante  $C_3(\mathbf{B}, \delta, \tau)$  telle que

$$\forall \alpha \in (0, \alpha_0], \quad \|e^{\delta d_\Upsilon}u_{\mathbf{B},\alpha,\tau}\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)} < C_3(\mathbf{B}, \delta, \tau) .$$



## Chapitre 5

# Le problème sur le secteur pour des grandes valeurs du paramètre de Fourier

Soit  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$  un champ magnétique constant unitaire. Ses coordonnées sphériques sont notées  $(\gamma, \theta)$ . Nous rappelons que l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est la réalisation de Neumann sur le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  de l'opérateur  $-(\nabla - i\underline{\mathbf{A}})^2 + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ , avec  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(b_3)$  un potentiel magnétique plan et  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  le potentiel électrique défini par

$$V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}(x_1, x_2) = (x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau)^2.$$

La forme quadratique associée à cet opérateur est notée  $\mathcal{Q}_\tau$ , elle est définie sur le domaine de forme  $H_{\underline{\mathbf{A}}, V}^1(\mathcal{S}_\alpha)$ .

Le potentiel électrique s'annule sur la droite  $\Upsilon$  d'équation  $x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau = 0$ . Nous rappelons que nous avons défini

$$\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha; \tau) := \inf \mathfrak{S}(P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}).$$

Quand le couple  $(\gamma, \theta)$  désigne les coordonnées sphériques du champ magnétique  $\mathbf{B}$ , on a la notation suivante :

$$\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) := \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau).$$

Nous cherchons à déterminer l'infimum sur  $\tau$  de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$ , en effet on a d'après (3.18)

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau).$$

Nous voulons savoir si cet infimum est atteint. Nous introduisons la notation suivante :

**Définition 5.1.** *On pose*

$$s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) = \min \left( \liminf_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau), \liminf_{\tau \rightarrow -\infty} \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) \right). \quad (5.1)$$

Comme précédemment nous notons en coordonnées sphériques

$$s^\infty(\gamma, \theta; \alpha) := s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) .$$

On a d'après (3.18)

$$s(\mathbf{B}; \alpha) \leq s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) .$$

Ainsi en vertu de la continuité de  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$ , pour savoir si la borne inférieure sur  $\tau$  des  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est atteinte il suffit de montrer  $s(\mathbf{B}; \alpha) < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$ .

Dans le cas particulier  $\gamma = 0$ , c'est-à-dire lorsque le champ magnétique est  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ , l'opérateur s'écrit

$$P_{\underline{\mathbf{A}}, s_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = P_{\underline{\mathbf{A}}, s_\alpha} + \tau^2$$

et on a

$$\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) = \mu(\alpha) + \tau^2 . \quad (5.2)$$

L'étude du comportement par rapport à  $\tau$  de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est alors triviale. On a en particulier

$$s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) = +\infty .$$

Revenons au cas général : d'après la proposition 3.18, la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Afin de savoir si sa borne inférieure est atteinte, nous calculons dans ce chapitre les limites quand  $\tau \rightarrow -\infty$  et  $\tau \rightarrow +\infty$  de la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  (on s'attend à ce que celles-ci dépendent de  $\mathbf{B}$  et de  $\alpha$ ). Ce calcul est fait pour le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  dans [Pan02], nous allons généraliser le résultat au cas  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ . Nous allons aussi l'améliorer en donnant une forme explicite pour les différentes limites à l'aide de la fonction  $\sigma_1$  étudiée dans le chapitre 2 et des différents paramètres.

Dans la section 5.1, nous montrons que le calcul de la limite de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  pour de grandes valeurs de  $|\tau|$  peut être ramené à un problème semi-classique. Dans la section 5.2, nous généralisons les résultats de [Pan02] au cas  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , et nous utilisons la proposition 4.3 qui nous permet d'expliciter la limite à l'aide de la fonction  $\sigma_1$  et des paramètres. Il faut une fois de plus faire une disjonction de cas selon que la droite d'annulation du potentiel  $\Upsilon$  est sortante, entrante ou tangente. Ces calculs explicites de limites donnent des majorations pour  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$ . Ils permettent aussi dans le cas d'une droite tangente d'affirmer que l'infimum sur  $\tau$  des  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est atteint. De nombreuses simulations numériques appuient ces résultats. Dans la section 5.3, nous présentons des calculs numériques pour un cas particulier symétrique et nous observons un phénomène d'effet tunnel.

## 5.1 Analyse semi-classique du problème

Nous montrons que le problème peut se ramener à un problème semi-classique et nous rappelons des résultats connus. Nous supposons que le potentiel magnétique plan  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(b_3)$  est linéaire (nous avons vu dans la section 3.1 trois exemples pour un tel potentiel). Nous regardons ce qu'il se passe lorsque  $|\tau|$  tend vers l'infini. La distance de l'origine (qui coïncide avec le coin du secteur) à la droite  $\Upsilon$  d'équation  $x_1 b_2 - x_2 b_1 - \tau =$

0 tend elle aussi vers l'infini. Nous supposons  $\tau \neq 0$  et nous réalisons le changement d'échelle  $(X_1, X_2) = \tau^{-1}(x_1, x_2)$  qui laisse le secteur invariant. L'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est unitairement équivalent à la réalisation de Neumann sur l'ouvert  $\mathcal{S}_\alpha$  de

$$-\left(\frac{1}{\tau}\nabla - i\tau\underline{\mathbf{A}}\right)^2 + \tau^2(X_1b_2 - X_2b_1 - 1)^2.$$

On introduit le paramètre semi-classique  $h = |\tau|^{-2}$ , de sorte que  $h$  tend vers 0 quand  $|\tau|$  vers  $+\infty$ . On obtient que  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est unitairement équivalent à

$$\frac{1}{h} \left( -(h\nabla - i\underline{\mathbf{A}})^2 + (X_1b_2 - X_2b_1 - 1)^2 \right).$$

Nous décrivons maintenant des résultats connus pour un opérateur de Schrödinger semi-classique avec potentiel magnétique et potentiel électrique : soit

$$-(h\nabla - i\underline{\mathbf{A}})^2 + V$$

un opérateur de ce type. Dans le cas où cet opérateur agit sur  $\mathbb{R}^n$  ou sur une variété compacte, on connaît un développement asymptotique du bas du spectre lorsque  $h$  tend vers 0 sous l'hypothèse que le potentiel électrique  $V$  possède un nombre fini de minima non dégénérés : dans ce cas, on approche le potentiel électrique  $V$  par ses approximations quadratiques près de ces minima et on se ramène à étudier l'opérateur  $-(h\nabla - i\underline{\mathbf{A}})^2 + |x|^2$  sur  $\mathbb{R}^n$  (voir [Mat95] et [MU96]) par exemple). L'idée directrice est celle de l'approximation harmonique déjà vue dans les chapitres précédents : quand  $h$  tend vers 0, les vecteurs propres se concentrent près des minima du potentiel électrique.

Néanmoins pour notre opérateur  $-(h\nabla - i\underline{\mathbf{A}})^2 + (X_1b_2 - X_2b_1 - 1)^2$  sur  $\mathcal{S}_\alpha$ , ces résultats ne s'appliquent pas : les minima du potentiel électrique sont dégénérés. De plus, lorsque la droite entre dans le secteur (voir la définition 3.17), le potentiel s'annule sur une demi-droite contenue dans le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$ . Nous avons vu à la proposition 4.14 que cette situation génère du spectre essentiel pour l'opérateur.

Dans le chapitre 2, nous avons étudié un opérateur de Schrödinger avec un potentiel électrique qui s'annule sur une demi-droite. Nous avons constaté que les vecteurs propres associés à des valeurs propres situées sous le spectre essentiel sont concentrés près de la ligne d'annulation du potentiel électrique. Nous faisons le raisonnement heuristique suivant : si ce fait reste vrai pour l'opérateur  $-(h\nabla - i\underline{\mathbf{A}})^2 + (X_1b_2 - X_2b_1 - 1)^2$  sur le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$ , alors les vecteurs propres sont concentrés près de la droite d'équation  $X_1b_2 - X_2b_1 - 1 = 0$ . Or la distance du coin  $(0, 0)$  du secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  à cette droite est fixe et strictement positive. On s'attend donc à ce que l'opérateur  $-(h\nabla - i\underline{\mathbf{A}})^2 + (X_1b_2 - X_2b_1 - 1)^2$  ne "voit plus" le coin du secteur quand  $h$  tend vers 0. On est alors ramené à un opérateur modèle sur des domaine réguliers.

## 5.2 Calcul des limites quand le paramètre de Fourier est grand

On a vu (cf (5.2)) que pour un champ tangent à l'arête du dièdre, c'est-à-dire pour  $\gamma = 0$ , on a  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) = +\infty$ . Dans cette section, on calcule pour  $\gamma \neq 0$  la limite de

$\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  quand  $\tau$  tend vers  $\pm\infty$  :

**Dans la suite de ce chapitre, on suppose  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$ .**

### 5.2.1 Condition de la droite sortante

Dans toute cette sous-section on suppose que la droite  $\Upsilon$  sort du secteur, c'est-à-dire  $\theta \in [0, \frac{\pi-\alpha}{2})$  (voir la figure 3.4). On commence par le cas  $\tau \rightarrow -\infty$ . On remarque que dès que  $\tau < 0$ , l'intersection  $\Upsilon \cap \mathcal{S}_\alpha$  de la droite d'annulation de  $V_{\mathbf{B}, \tau}$  et du secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  est vide. La distance entre  $\Upsilon$  et  $\mathcal{S}_\alpha$  tend vers l'infini quand  $\tau$  tend vers  $-\infty$ . Ces considérations aboutissent à la proposition suivante :

**Proposition 5.2.** *On suppose que  $\theta \in [0, \frac{\pi-\alpha}{2})$ . On a alors*

$$\forall \gamma \in (0, \frac{\pi}{2}], \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) = +\infty. \quad (5.3)$$

*De plus la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  est décroissante sur  $(-\infty, 0)$  et minorée par  $\tau^2$ .*

*Preuve :* Lorsque  $\tau < 0$  on a  $\Upsilon \cap \mathcal{S}_\alpha = \emptyset$ . On constate que la distance d'un point  $(x_1, x_2)$  du secteur à la droite  $\Upsilon$  est minimale en  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  et vaut  $\tau$ . On a donc :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, \quad V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1, x_2) \geq \tau^2.$$

On déduit donc

$$\forall u \in H_{\mathbf{A}, V}^1(\mathcal{S}_\alpha), \quad \mathcal{Q}_\tau(u) \geq \tau^2 \|u\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2.$$

On déduit du principe du min-max la minoration  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) \geq \tau^2$  et la limite quand  $\tau$  tend vers  $-\infty$ . Pour la monotonie de  $\tau \mapsto \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$ , on constate que lorsque la droite  $\Upsilon$  sort du secteur, on a pour  $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha$  fixé :

$$\tau \mapsto V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1, x_2) \text{ est décroissante sur } (-\infty, 0).$$

On déduit le résultat du principe du min-max. □

**Remarque 5.3.** Si on sait par ailleurs que la première valeur propre est simple, la formule de Feynman-Hellmann (4.7) donne directement la stricte décroissance pour  $\tau < 0$ .

Nous rappelons que la fonction  $\sigma_1^{\text{aux}}$  a été introduite dans la définition 4.2. Nous énonçons le résultat principal de cette section :

**Théorème 5.4.** *On suppose que  $\theta \in [0, \frac{\pi-\alpha}{2})$ . On a alors*

$$\forall \gamma \in (0, \frac{\pi}{2}], \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)). \quad (5.4)$$

*Preuve* : La preuve se fait en deux étapes : dans un premier temps nous construisons un quasi-mode pour l'opérateur  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$  à partir d'un quasi-mode de l'opérateur sur le demi-plan. Ce procédé fournit une majoration pour  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$ . Dans un deuxième temps on minore cette quantité : on montre d'abord que les vecteurs propres sont concentrés près de la droite  $\Upsilon$ . On construit ensuite une partition du secteur selon que l'on soit loin ou près du coin. Une comparaison avec les opérateurs modèles étudiés dans la proposition 4.3 permet de conclure.

CONSTRUCTION DE QUASI-MODE ET MAJORATION. Soit  $\delta_1 = \frac{\pi-\alpha}{2} - \theta$  l'angle que fait la droite  $\Upsilon$  avec le bord supérieur de  $\mathcal{S}_\alpha$  (voir la figure 5.1). Nous rappelons que le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\gamma, -\delta_1, 0}$  est une valeur propre simple (voir la proposition 4.3) notée  $\underline{s}(\gamma, -\delta_1; \pi, 0)$ . On rappelle que  $\underline{s}(\gamma, -\delta_1; \pi, 0) = \underline{s}(\gamma, \delta_1; \pi, 0)$ , mais pour des raisons géométriques nous travaillerons avec l'opérateur  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\gamma, -\delta_1, 0}$ . Soit  $\epsilon > 0$ , d'après le principe du min-max il existe un quasi-mode  $u^{\text{app}} \in C_0^\infty(\mathcal{S}_\pi)$  tel que

$$\langle (P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\gamma, -\delta_1, 0})u^{\text{app}}, u^{\text{app}} \rangle_{L^2(\mathcal{S}_\pi)} \leq \underline{s}(\gamma, -\delta_1; \pi, 0) + \epsilon.$$

Soit  $R_{\frac{\pi-\alpha}{2}}$  la rotation de centre l'origine et d'angle  $\frac{\pi-\alpha}{2}$ . Nous notons  $\mathbf{t} := (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2})$  un vecteur directeur unitaire de la droite  $x_2 = \tan \frac{\alpha}{2} x_1$ . Cette droite délimite le bord supérieur du secteur  $\mathcal{S}_\alpha$ . Soit  $h_\tau$  l'affinité définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$h_\tau : (x_1, x_2) \mapsto R_{\frac{\pi-\alpha}{2}}(x_1, x_2) - \frac{\tau}{\sin \gamma \sin \delta_1} \mathbf{t} := (y_1, y_2). \quad (5.5)$$

On a donc  $(x_1, x_2) = h_\tau^{-1}(y_1, y_2) = R_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}(y_1, y_2) + \frac{\tau}{\sin \gamma \sin \delta_1} \mathbf{t}$ , soit :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \cos \frac{\pi-\alpha}{2} + y_2 \sin \frac{\pi-\alpha}{2} + \frac{\tau}{\sin \gamma \sin \delta_1} \cos \frac{\alpha}{2} \\ x_2 = -y_1 \sin \frac{\pi-\alpha}{2} + y_2 \cos \frac{\pi-\alpha}{2} + \frac{\tau}{\sin \gamma \sin \delta_1} \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (5.6)$$

En vue d'appliquer les propositions B.3 et B.4 sur les translations et les rotations, on calcule

$$(x_1, x_2) \wedge \mathbf{t} = \frac{\tau}{\sin \gamma \sin \delta_1} \left( x_1 \sin \frac{\alpha}{2} - x_2 \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

On définit alors le quasi-mode :

$$u_\tau^{\text{app}}(x_1, x_2) = e^{i \frac{\tau \cos \gamma}{\sin \gamma \sin \delta_1} (x_1 \sin \frac{\alpha}{2} - x_2 \cos \frac{\alpha}{2})} u^{\text{app}} \circ h_\tau(x_1, x_2).$$

On a

$$\text{supp}(u_\tau^{\text{app}}) = h_\tau^{-1}(\text{supp}(u^{\text{app}})) = R_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}(\text{supp}(u^{\text{app}})) + \frac{\tau}{\sin \gamma \sin \delta_1} \mathbf{t}.$$

Ainsi puisque  $\text{supp}(u^{\text{app}}) \subset \mathcal{S}_\pi$ , pour  $\tau$  suffisamment grand on a  $\text{supp}(u_\tau^{\text{app}}) \subset \mathcal{S}_\alpha$  (voir la figure 5.1). Pour  $\tau$  assez grand on a donc  $u_\tau^{\text{app}} \in C_0^\infty(\overline{\mathcal{S}_\alpha})$ . On évalue l'énergie de  $u_\tau^{\text{app}}$  : d'après les propositions B.3 et B.4, on a

$$\langle P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\alpha} u_\tau^{\text{app}}, u_\tau^{\text{app}} \rangle_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)} = \langle P_{\underline{A}, \mathcal{S}_\pi} u^{\text{app}}, u^{\text{app}} \rangle_{L^2(\mathcal{S}_\pi)}.$$



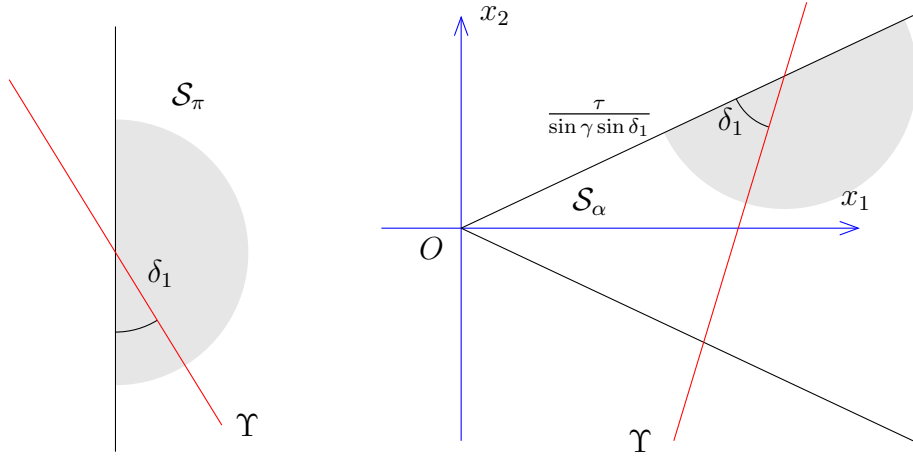


FIGURE 5.1 – Un quasi-mode  $u^{\text{app}}$  de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\gamma, -\delta_1, 0}$  subit une rotation et une translation pour fournir un quasi-mode  $u_\tau^{\text{app}}$  de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$ . Il faut que  $\tau$  soit grand pour que le secteur contienne le support de  $u_\tau^{\text{app}}$ .

On calcule  $V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1, x_2)$  dans les nouvelles variables à l'aide de (5.6) :

$$\begin{aligned}
 & \sin \gamma (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta) - \tau \\
 &= \sin \gamma \left( y_1 \left( \cos \frac{\pi-\alpha}{2} \cos \theta + \sin \frac{\pi-\alpha}{2} \sin \theta \right) + y_2 \left( \sin \frac{\pi-\alpha}{2} \cos \theta - \cos \frac{\pi-\alpha}{2} \sin \theta \right) \right) \\
 & \quad + \frac{\tau}{\sin \gamma \sin \delta_1} \left( \cos \frac{\alpha}{2} \cos \theta - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \theta \right) \sin \gamma - \tau \\
 &= \sin \gamma (y_1 \cos \delta_1 + y_2 \sin \delta_1) .
 \end{aligned}$$

On a donc

$$V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1, x_2) = V_{\gamma, -\delta_1, 0}(y_1, y_2)$$

puis

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_\tau(u_\tau^{\text{app}}) &= \langle (P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\gamma, -\delta_1, 0})u^{\text{app}}, u^{\text{app}} \rangle_{L^2(\mathcal{S}_\pi)} \\
 &\leq \underline{s}(\gamma, -\delta_1; \pi, 0) + \epsilon .
 \end{aligned}$$

On utilise alors les résultats de la proposition 4.3 :

$$\begin{aligned}
 \underline{s}(\gamma, -\delta_1; \pi, 0) &= \underline{s}(\gamma, \delta_1; \pi, 0) \\
 &= \sigma_1(\arcsin(\sin \gamma \sin \delta_1)) \\
 &= \sigma_1 \left( \arcsin(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)) \right) .
 \end{aligned}$$

On a donc montré en utilisant la définition 4.2 :

$$\limsup_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) \leq \sigma_1^{\text{aux}} \left( \sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta) \right) . \quad (5.7)$$

MINORATION. Nous montrons que les vecteurs propres sont concentrés près de  $\Upsilon$ , et nous nous ramenons à des opérateurs modèles. Nous considérons les angles  $(\delta_i)_{i=1,\dots,4}$  définis sur la figure 5.2. Nous constatons que  $\delta_1 = \frac{\pi-\alpha}{2} - \theta$  est le plus petit de ces quatre angles. Nous réalisons une partition du secteur pour isoler deux domaines modèles associés à ces angles  $\delta_i$  ainsi que le coin. Soit donc  $L > 0$ , et découpons  $\mathcal{S}_\alpha$  en sous-domaines (voir la figure 5.3) :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, x_1 > L, x_2 > 0\} , \\ \Omega_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, x_1 > L, x_2 < 0\} , \\ \Omega_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, x_1 < L\} . \end{cases}$$

Pour construire les troncatures nous perturbons les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de  $\frac{1}{2}L \tan \frac{\alpha}{2}$  selon l'axe  $\{x_2\}$  (voir la figure 5.4). De même nous perturbons  $\Omega_3$  selon l'axe  $\{x_1\}$  de  $\frac{L}{4}$  :

$$\begin{cases} \Omega_1^{\text{pert}} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, x_1 > L, x_2 > \frac{1}{2}L \tan \frac{\alpha}{2}\} , \\ \Omega_2^{\text{pert}} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, x_1 > L, x_2 < -\frac{1}{2}L \tan \frac{\alpha}{2}\} , \\ \Omega_3^{\text{pert}} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, x_1 < \frac{3}{4}L\} . \end{cases}$$

Nous définissons maintenant les troncatures :

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, 3, \quad 0 \leq \chi_i \leq 1 \\ \chi_1 = 1 \text{ sur } \Omega_1^{\text{pert}} \text{ et } \chi_1 = 0 \text{ sur } \Omega_2^{\text{pert}} \cup \Omega_3^{\text{pert}} , \\ \chi_2 = 1 \text{ sur } \Omega_2^{\text{pert}} \text{ et } \chi_2 = 0 \text{ sur } \Omega_1^{\text{pert}} \cup \Omega_3^{\text{pert}} , \\ \chi_3 = 1 \text{ sur } \Omega_3^{\text{pert}} \text{ et } \chi_3 = 0 \text{ sur } \mathbb{C}\Omega_3 , \\ \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = 1 . \end{cases}$$

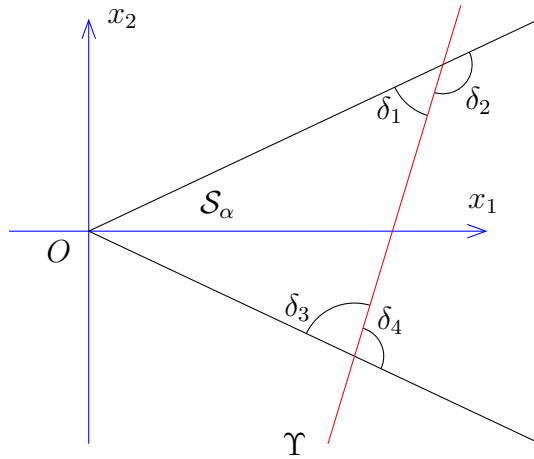


FIGURE 5.2 – L'intersection de la droite  $\Upsilon$  et du bord du secteur. Le plus petit des quatre angles  $\delta_i$  est  $\delta_1 = \frac{\pi-\alpha}{2} - \theta$ .

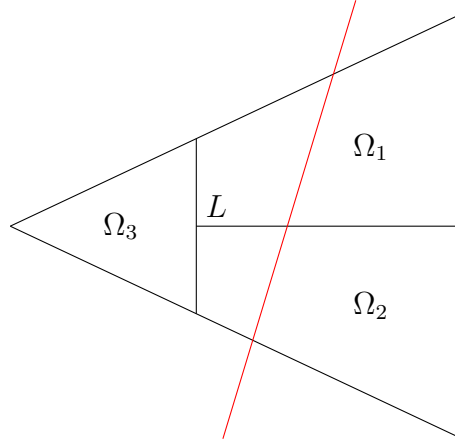
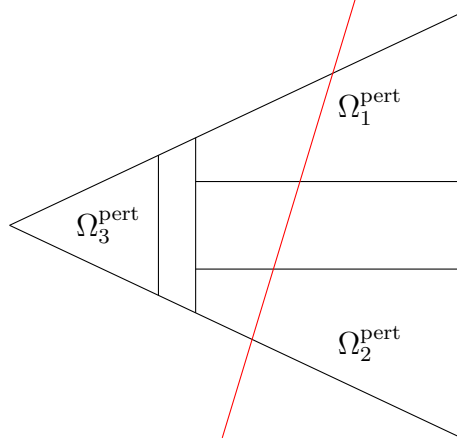
FIGURE 5.3 – Le secteur est découpé en sous-domaines  $(\Omega_i)$ .

FIGURE 5.4 – Les sous-domaines perturbés.

On remarque que pour  $i \neq j$  on a  $\text{dist}(\Omega_i^{\text{pert}}, \Omega_j^{\text{pert}}) \geq \min(L \tan \frac{\alpha}{2}, \frac{L}{4})$ . On peut donc construire les  $\chi_i$  de manière à avoir

$$\exists C > 0, \forall i = 1, 2, 3, \quad \|\nabla \chi_i\|_{\infty}^2 \leq \frac{C}{L^2}. \quad (5.8)$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Nous fixons  $L$  suffisamment grand pour avoir

$$\frac{C}{L^2} < \epsilon. \quad (5.9)$$

Nous avons supposé que la droite  $\Upsilon$  sort du secteur  $\mathcal{S}_{\alpha}$ . L'opérateur  $P_{\underline{A}, \mathcal{S}_{\alpha}} + V_{\gamma, \theta, \tau}$  est donc à résolvante compacte d'après la proposition 4.10 et on a bien existence d'une plus petite valeur propre. Nous notons ici  $(\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau), u_{\tau})$  une première paire propre avec  $u_{\tau}$  un vecteur propre normalisé, les paramètres  $\gamma, \theta$  et  $\alpha$  étant fixés.

On commence par regarder ce qu'il se passe sur  $\Omega_1^{\text{pert}}$ . On a  $\text{supp}(\chi_1 u_{\tau}) \subset \mathcal{S}_{\alpha} \setminus (\Omega_2^{\text{pert}} \cup \Omega_3^{\text{pert}})$ . On utilise à nouveau l'affinité  $h_{\tau}$  (voir (5.5)) pour se ramener à un opérateur sur le

demi-plan  $\mathcal{S}_\pi$  : en effet on a  $(\chi_1 u) \circ h_\tau \in \text{Dom}(P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\gamma, \delta_1, 0})$ . Comme plus haut, on a aussi

$$\mathcal{Q}_\tau(\chi_1 u_\tau) = \langle (P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\pi} + V_{\gamma, -\delta_1, 0})(\chi_1 u_\tau \circ h_\tau), (\chi_1 u_\tau) \circ h_\tau \rangle_{L^2(\mathcal{S}_\pi)}$$

et donc en utilisant le principe du min-max :

$$\mathcal{Q}_\tau(\chi_1 u_\tau) \geq \underline{s}(\gamma, \delta_1; \pi, 0) \|\chi_1 u_\tau\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2. \quad (5.10)$$

On a aussi

$$\mathcal{Q}_\tau(\chi_1 u_\tau) \geq \underline{s}(\gamma, \delta_2; \pi, 0) \|\chi_1 u_\tau\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2.$$

On prouve de même

$$\mathcal{Q}_\tau(\chi_2 u_\tau) \geq \underline{s}(\gamma, \delta_3; \pi, 0) \|\chi_2 u_\tau\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2$$

et

$$\mathcal{Q}_\tau(\chi_2 u_\tau) \geq \underline{s}(\gamma, \delta_4; \pi, 0) \|\chi_2 u_\tau\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2.$$

Or on a vu que  $\underline{s}(\gamma, \delta_i; \pi, 0) = \sigma_1(\arcsin(\sin \gamma \sin \delta_i))$ . Comme  $x \mapsto \sigma_1(x)$  est strictement croissante sur  $(0, \frac{\pi}{2})$  (voir la proposition 2.6) et  $\delta_1 = \min_i(\delta_i)$ , on a

$$\mathcal{Q}_\tau(\chi_2 u_\tau) \geq \underline{s}(\gamma, \delta_1; \pi, 0) \|\chi_2 u_\tau\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2. \quad (5.11)$$

Montrons maintenant que l'énergie du quasi-mode est petite sur  $\Omega_3^{\text{pert}}$ . On commence par noter que les valeurs propres  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  sont bornées quand  $\tau$  est grand d'après la construction de quasi-modes : en effet puisque pour  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  on a  $\sigma_1(x) < 1$ , on obtient grâce à (5.7) :

$$\exists \tau_0 > 0, \forall \tau > \tau_0, \quad \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) < 1. \quad (5.12)$$

Pour  $L$  fixé et  $\tau > \tau_0$  on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_3} V_{\gamma, \theta, \tau} |u_\tau|^2 &\leq \int_{\mathcal{S}_\alpha} V_{\gamma, \theta, \tau} |u_\tau|^2 \\ &\leq \langle (P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}) u_\tau, u_\tau \rangle_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}. \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant (5.12) on a pour  $\tau > \tau_0$  :

$$\int_{\Omega_3} V_{\gamma, \theta, \tau} |u_\tau|^2 \leq 1. \quad (5.13)$$

On rappelle que  $L$  a été fixé. On a

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( \inf_{\Omega_3} V_{\gamma, \theta, \tau} \right) = +\infty$$

et donc grâce à (5.13) on a :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\Omega_3^{\text{pert}}} |u_\tau|^2 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\Omega_3} |u_\tau|^2 = 0. \quad (5.14)$$

On rappelle la formule IMS (B.6) :

$$\mathcal{Q}_\tau(\chi_3 u) = \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) \langle \chi_3 u_\tau, \chi_3 u_\tau \rangle + \|\nabla \chi_3 |u_\tau|\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2.$$

Puisque  $\text{supp}(\chi_3) \subset \Omega_3$ , on utilise (5.8), (5.8), (5.14) et (5.12) :

$$\exists \tau_1 > \tau_0, \forall \tau > \tau_1 \quad \mathcal{Q}_\tau(\chi_3 u) \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \|\nabla \chi_3 u_\tau\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2 \leq \epsilon. \quad (5.15)$$

On rappelle la formule IMS (B.8) :

$$\mathcal{Q}_\tau(u_\tau) \geq \sum_i \mathcal{Q}_\tau(\chi_i u_\tau) - \sum_i \|\nabla \chi_i u_\tau\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2. \quad (5.16)$$

En utilisant (5.9), (5.10), (5.11), (5.14) et (5.15), cette formule IMS fournit

$$\forall \tau > \tau_1, \quad \mathcal{Q}_\tau(u_\tau) \geq \underline{s}(\gamma, \delta_1; \pi, 0) - 3\epsilon.$$

On a donc montré

$$\liminf_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) \geq \underline{s}(\gamma, \delta_1; \pi, 0).$$

En utilisant  $\delta_1 = \frac{\pi - \alpha}{2} - \theta$  et la proposition 4.3 on déduit la minoration

$$\liminf_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) \geq \sigma_1 \left( \arcsin(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)) \right),$$

soit en utilisant la notation introduite dans la définition 4.2 :

$$\liminf_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) \geq \sigma_1^{\text{aux}} \left( \sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta) \right),$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

Ainsi nous avons montré

$$s^\infty(\gamma, \theta; \alpha) = \sigma_1^{\text{aux}} \left( \sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta) \right).$$

D'après (3.18), nous avons  $s(\gamma, \theta; \alpha) \leq s^\infty(\gamma, \theta; \alpha)$ . Nous rappelons que nous voulons savoir si l'inégalité est stricte, autrement dit nous cherchons à savoir si l'infimum sur  $\tau$  des  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  est atteint. Nous allons pour cela chercher dans le chapitre suivant un  $\tau_*$  fixé et un quasi-mode normalisé  $u_{\tau_*}$  dont l'énergie  $\mathcal{Q}_{\tau_*}(u_{\tau_*})$  est strictement inférieure à la quantité  $\sigma_1^{\text{aux}} \left( \sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta) \right)$ . Dans cette optique nous donnons une minoration élémentaire de la valeur limite  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$ . On introduit une fonction analytique :

**Définition 5.5.** Soit la fonction

$$m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha) := \sqrt{(1 - \Theta_0^2) \left( b_2^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - b_1 b_2 \sin \alpha + b_1^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \Theta_0^2}, \quad (5.17)$$

ou encore en coordonnées sphériques :

$$m^{\text{ana}}(\gamma, \theta; \alpha) := \sqrt{(1 - \Theta_0^2) \sin^2 \gamma \cos^2(\frac{\alpha}{2} + \theta) + \Theta_0^2}. \quad (5.18)$$

On déduit de la proposition 2.11 et du théorème 5.4 :

**Corollaire 5.6.** Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique de coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta)$  avec  $\gamma > 0$ . Nous supposons que nous sommes dans le cadre de la droite sortante, c'est-à-dire  $\theta \in [0, \frac{\pi - \alpha}{2})$ . Alors on a

$$m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha) \leq s^\infty(\mathbf{B}; \alpha),$$

Le théorème 5.4 est illustré sur la figure 5.5. Nous avons pris un champ magnétique  $\mathbf{B}$  de coordonnées polaires  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$  de sorte que l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, S_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  est réel. Nous avons pris un secteur d'ouverture  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  : la droite  $\Upsilon$  est sortante. On constate que les valeurs calculées  $\check{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{10}, \tau)$  convergent bien vers  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta))$  quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . Sur la figure 5.6 nous traçons les vecteurs propres associés à  $\check{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{10}, \tau)$ . On constate qu'ils se concentrent le long de la droite  $\Upsilon$ . De plus quand  $\tau$  devient grand, le vecteur propre se concentre sur le bord supérieur du dièdre, là où l'angle  $\delta_i$  que fait la droite avec un des bords du secteur est le plus petit (voir la figure 5.2).

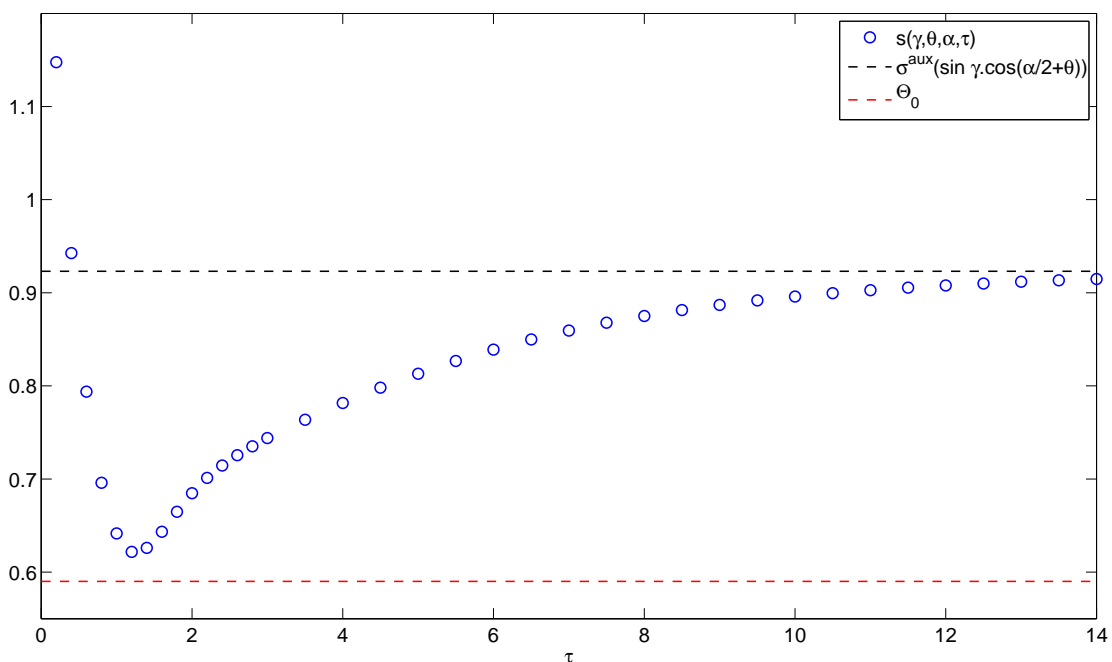


FIGURE 5.5 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{10}$ .  $\check{s}(\gamma, \theta, \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\tau = \frac{k}{10}$ ,  $0 \leq k \leq 30$  puis  $\tau = \frac{k}{2}$ ,  $7 \leq k \leq 28$  comparé à  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta))$  et  $\Theta_0$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(20, 35, \frac{\pi}{10})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

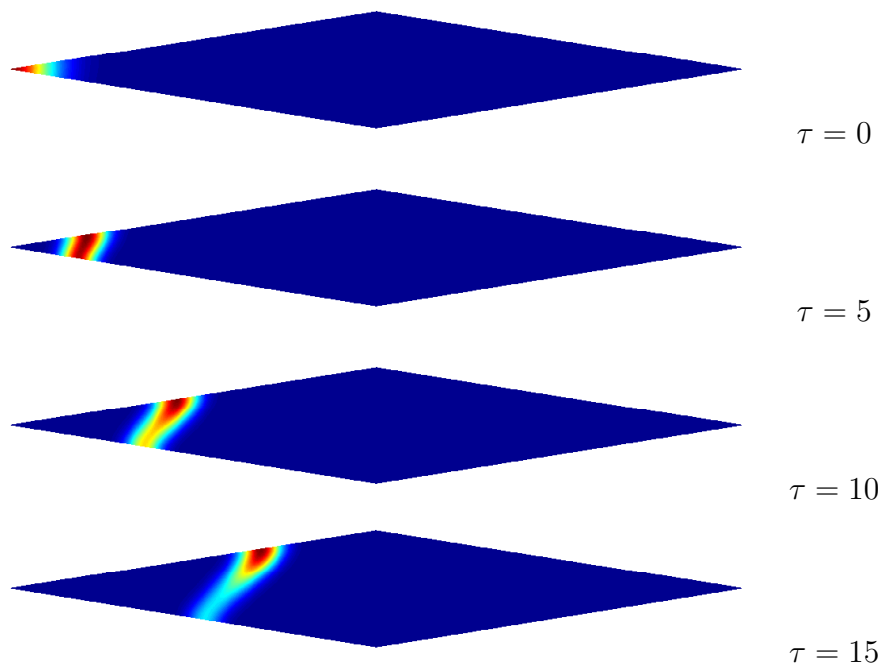


FIGURE 5.6 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{10}$ . Les vecteurs propres associés  $\check{\mathfrak{s}}(\gamma, \theta, \alpha, \tau)$  pour  $\tau = 5k$ ,  $0 \leq k \leq 3$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(20, 35, \frac{\pi}{10})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

### 5.2.2 Condition de la droite entrante

**Théorème 5.7.** *Nous supposons que le champ magnétique vérifie la condition de la droite entrante, c'est-à-dire  $\frac{\pi-\alpha}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . On a alors pour tout  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$  :*

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} - \theta)) \quad (5.19)$$

et

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)) , \quad (5.20)$$

avec  $\sigma_1^{\text{aux}}(x) = \sigma_1(\arcsin x)$ .

*Preuve :* La preuve est similaire à celle qui permet d'obtenir (5.4). Quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$  (respectivement  $\tau$  tend vers  $-\infty$ ), la majoration par  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} - \theta))$  (respectivement  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta))$ ) se fait de la même manière par construction de quasi-mode. On remarque alors que (5.12) reste valable. Nous avons montré à la proposition 4.14 que  $\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \tau, \alpha) = 1$ , le bas du spectre de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$  est donc une valeur propre de multiplicité finie, et nous avons l'existence d'un vecteur propre associé. Les estimations qui conduisent alors à la minoration sont les mêmes que dans le cas de la droite sortante.  $\square$

On constate que si  $\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2})$ , on a

$$\min(\cos(\frac{\alpha}{2} - \theta), \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)) = \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta) .$$

Ainsi en utilisant encore la stricte croissance de la fonction  $\sigma_1$  sur  $(0, \frac{\pi}{2})$ , on obtient

$$\forall \theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) < \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) .$$

On a donc montré quand  $\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$  :

$$s^\infty(\gamma, \theta; \alpha) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)) .$$

**Corollaire 5.8.** *Nous supposons que nous sommes dans le cas de la droite entrante. Alors la minoration du corollaire 5.6 reste vraie.*

Lorsque la droite est entrante, on a vu que l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  a du spectre essentiel. Le calcul des limites pour  $|\tau|$  grand nous permet de trouver du spectre discret sous le spectre essentiel :

**Proposition 5.9.** *Soit  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$ . Nous supposons que le champ magnétique vérifie la condition de la droite entrante, c'est-à-dire  $\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Alors pour  $|\tau|$  assez grand, la valeur  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  correspond à une valeur propre de multiplicité finie pour l'opérateur sur le secteur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ .*



*Preuve :* D'après la proposition 4.14, on a  $\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \alpha, \tau) = 1$ . Puisque

$$\forall x \in [0, 1), \quad \sigma_1^{\text{aux}}(x) < 1 ,$$

on a existence de spectre discret pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  dès que  $|\tau|$  est suffisamment grand d'après le théorème 5.7.  $\square$

On déduit du théorème 5.7, de la proposition 2.3 et de la proposition 4.14 :

**Corollaire 5.10.** *Soit  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Alors on a une majoration pour le bas du spectre de l'opérateur sur le dièdre :*

$$s(\gamma, \theta; \alpha) < 1 .$$

*De plus si l'infimum sur  $\tau \in \mathbb{R}$  des  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  est atteint en un  $\tau_* \in \mathbb{R}$ , alors il s'agit d'une valeur propre de multiplicité finie pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau_*}$ .*

On note qu'à ce stade, on ne sait pas si l'infimum sur  $\tau$  est atteint.

**Remarque 5.11.** Pour une valeur propre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  située sous le spectre essentiel, le corollaire 4.11 s'applique encore : si la valeur propre  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  est simple, la formule de Feynman-Hellmann permet de calculer sa dérivée par rapport au paramètre de Fourier.

Sur la figure 5.7 on trace les valeurs de  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  calculées par éléments finis pour un secteur d'angle  $\alpha = \frac{4\pi}{5}$  et un champ de coordonnées sphériques  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . On vérifie que les limites quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$  sont bien celles prévues par le théorème 5.7.

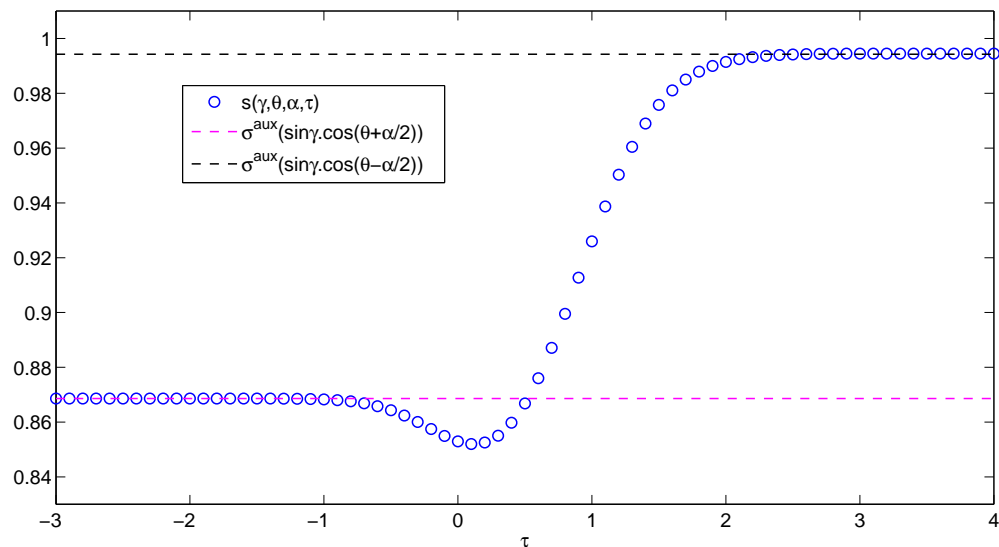


FIGURE 5.7 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\alpha = \frac{4\pi}{5}$ .  $\check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\tau = \frac{k}{10}$ ,  $-20 \leq k \leq 30$  comparé à  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\theta + \frac{\alpha}{2}))$  et  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\theta - \frac{\alpha}{2}))$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(20, 20, \frac{4\pi}{5})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

Sur la figure 5.8 on trace les vecteurs propres associés à  $\check{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}; \frac{4\pi}{5}, \tau)$ . On constate qu'ils se concentrent le long de la droite  $\Upsilon$ . De plus lorsque  $\tau > 0$ , les vecteurs propres semblent être moins concentrés. Nous donnons un élément heuristique pour comprendre ce phénomène : quand  $\tau > 0$ , l'angle entre  $\Upsilon$  et le bord du secteur est plus grand, et nous avons vu au chapitre 2 que plus  $\theta$  est proche de  $\frac{\pi}{2}$ , plus les vecteurs propres de l'opérateur  $\mathcal{L}_\theta$  s'étalent le long de la droite d'annulation du potentiel (voir les figures 2.5 et 2.6). Or ce sont ces vecteurs propres qui nous ont servi pour construire des quasi-modes pour l'opérateur  $P_{\underline{A}, S_\alpha} + V_{\underline{B}, \tau}$  quand le paramètre  $\tau$  est grand.

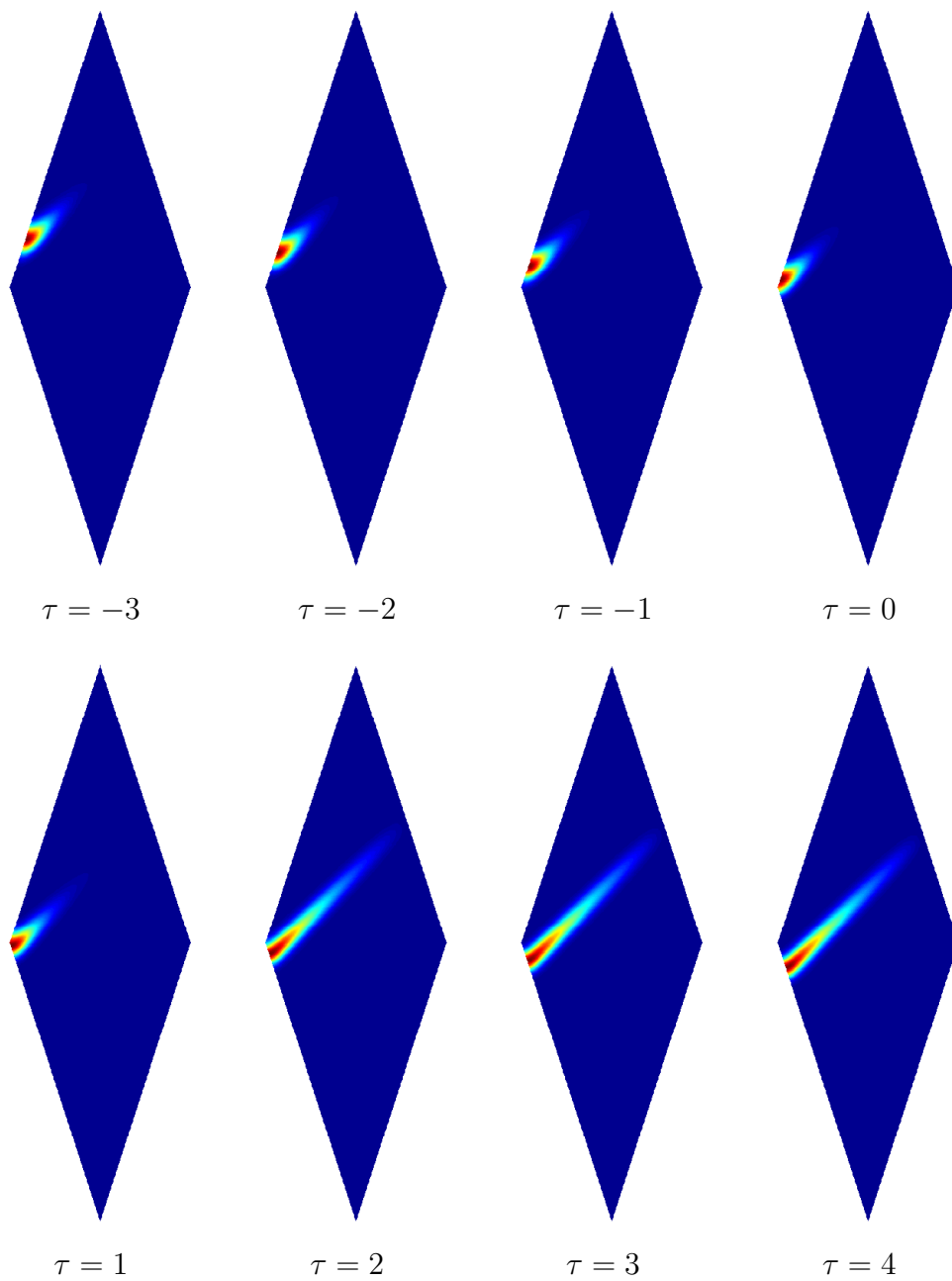


FIGURE 5.8 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  et  $\alpha = \frac{4\pi}{5}$ . Les vecteurs propres associés  $\check{\xi}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  pour  $\tau = k$ ,  $-3 \leq k \leq 4$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(20, 20, \frac{4\pi}{5})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

### 5.2.3 Condition de la droite tangente

Pour compléter notre étude nous décrivons la limite du bas du spectre de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\gamma, \theta, \tau}$  lorsque le champ magnétique vérifie la condition de la droite tangente :

**Proposition 5.12.** *Soit  $\alpha \in (0, \pi)$ . On a*

$$\forall \gamma \in (0, \frac{\pi}{2}], \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) = +\infty. \quad (5.21)$$

*Preuve :* Il suffit de constater sur la figure 3.5 que pour  $\tau < 0$  on a

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha, \quad V_{\gamma, \theta, \tau}(x_1, x_2) \geq \tau^2.$$

Les arguments sont alors les mêmes que pour la preuve de la proposition 5.2. □

On a :

**Théorème 5.13.** *Soit  $\alpha \in (0, \pi)$ . On a*

$$\forall \gamma \in (0, \frac{\pi}{2}], \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha). \quad (5.22)$$

*Preuve :* La preuve est similaire à celle du théorème 5.4. Quand  $\tau > 0$ , l'intersection de la droite  $\Upsilon$  avec le bord inférieur du secteur fait l'angle  $\alpha$ . La construction de quasi-mode fournit encore :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \tau_0 > 0, \forall \tau > \tau_0, \quad \underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) \leq \sigma_1(\arcsin(\sin \gamma \sin \alpha)) + \epsilon.$$

Or on a prouvé  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \frac{\pi-\alpha}{2}, \tau) = 1$  (voir la proposition 4.17). Ainsi il existe  $d \in (0, 1)$  et  $\tau_1 > \tau_0$  tels que

$$\forall \tau > \tau_1, \quad \underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) < d < \underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau).$$

Ceci garantit l'existence d'un vecteur propre associé à  $\underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau)$  pour  $\tau$  suffisamment grand. On conclut comme dans la preuve du théorème 5.4. □

On a donc montré

$$s^\infty(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha).$$

On déduit de la proposition 2.11 une minoration de cette valeur limite :

**Corollaire 5.14.** *Nous supposons que nous sommes dans le cas de la droite tangente. Alors on a*

$$\forall \gamma \in (0, \frac{\pi}{2}], \quad \Theta_0 < \sqrt{(1 - \Theta_0^2) \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha + \Theta_0^2} \leq s^\infty(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha).$$

En combinant le théorème 5.13 et la proposition 4.17 on montre que pour certaines valeurs de  $\tau$ ,  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  correspond à du spectre discret pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  :

**Corollaire 5.15.** *Soit  $\alpha \in (0, \pi)$  différent de  $\frac{\pi}{2}$ . On a*

$$\forall \gamma \in (0, \frac{\pi}{2}], \exists \tau_0 \in \mathbb{R}, \forall \tau \geq \tau_0, \quad \underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) < \underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau). \quad (5.23)$$

Pour le cas de la droite tangente, on montre que l'infimum sur  $\tau$  est atteint :

**Théorème 5.16.** *On suppose que le champ magnétique vérifie la condition de la droite tangente, c'est-à-dire  $\theta = \frac{\pi-\alpha}{2}$ . Alors pour tout  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , l'infimum sur  $\tau \in \mathbb{R}$  des  $\underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau)$  est atteint en un  $\tau_* \in \mathbb{R}$ , et on a*

$$\forall \alpha \in (0, \pi), \quad s(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha) = \underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau_*) .$$

*Preuve :* On a d'après le corollaire 4.18 :

$$\underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \xi_0 \sin \gamma) \leq \underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \xi_0 \sin \gamma) = \Theta_0 .$$

On déduit donc du corollaire 5.14 :

$$\inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau) < s^\infty(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha) .$$

Comme la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , la borne inférieure est atteinte, et la proposition résulte de la relation (3.18).  $\square$

**Remarque 5.17.** Bien que cet infimum soit atteint en un certain  $\tau_*$ , nous ne savons pas si la quantité  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau_*)$  correspond à du spectre discret pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau_*}$  (alors que c'est le cas pour une droite entrante, voir le corollaire 5.10). On a vu au théorème 4.21 que pour  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  et  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ , l'infimum est atteint pour  $\tau_* = \xi_0 \sin \gamma$  et vaut  $\Theta_0$ , mais que cette valeur correspond à du spectre essentiel pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau_*}$ . Remarquons que le spectre essentiel  $\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \frac{\pi-\alpha}{2}; \alpha, \tau)$  est connu et minoré par  $\Theta_0$ . On montrera dans la suite que pour  $\alpha$  petit, la quantité  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  correspond à du spectre discret pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau_*}$ .

## 5.2.4 Synthèse des résultats

Nous rappelons que nous supposons  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$ . Remarquons que dans les trois configurations possibles pour la droite  $\Upsilon$ , les limites quand  $|\tau|$  est grand de  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  sont supérieures à  $\Theta_0$ . On déduit directement de la proposition 3.36 le résultat suivant :

**Corollaire 5.18.** *Supposons que  $\alpha$  est fixé et vérifie  $\mu(\alpha) < \Theta_0$ . Alors il existe une constante  $\gamma_0 > 0$  telle que pour tout  $\gamma \in [0, \gamma_0)$  et pour tout  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  on a*

$$s(\gamma, \theta; \alpha) < s^\infty(\gamma, \theta; \alpha) .$$

Autrement dit, si  $\mu(\alpha) < \Theta_0$  et si le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est suffisamment proche du champ magnétique tangent à l'arête  $(0, 0, 1)$ , l'infimum sur  $\tau \in \mathbb{R}$  des  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  est atteint. Dans la pratique, nous n'avons pas d'estimation sur la constante  $C_\alpha$  qui intervient dans la proposition 3.36, et nous ne pouvons donc pas quantifier  $\gamma_0$ .

Nous présentons dans la table 5.1 les différentes limites de la fonction  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  quand  $\tau$  tend vers  $\pm\infty$  selon les valeurs des paramètres  $(\gamma, \theta)$  et  $\alpha$ . On a démontré pour  $\gamma > 0$  :

$$s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)) \quad \text{dans le cas d'un champ non tangent}$$

et

$$s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha) \quad \text{dans le cas d'un champ tangent}$$

où  $s^\infty$  a été défini en (5.1). On constate que ces limites vérifient pour  $\gamma > 0$  la minoration suivante :

$$m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha) \leq s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) \quad (5.24)$$

où  $m^{\text{ana}}$  est donnée en (5.17). Ces minoration sont bien sûr encore vérifiée pour  $\gamma = 0$ .

Coordonnées sphériques de $\mathbf{B}$	Nature de la Droite $\Upsilon$	$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$	$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$	$\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$
$\gamma = 0$	Non définie	$+\infty$	$+\infty$	$\Theta_0 + \tau^2$
$\theta \in [0, \frac{\pi-\alpha}{2})$	Sortante	$+\infty$	$\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta))$	$\emptyset$
$\theta \in (\frac{\pi-\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$	Entrante	$\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta))$	$\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} - \theta))$	1
$\theta = \frac{\pi-\alpha}{2}$	Tangente	$+\infty$	$\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha)$	$\underline{s}(\gamma, 0; \pi, \tau)$

TABLE 5.1 – Les limites quand  $|\tau|$  tend vers l'infini du spectre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  sur le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$ . On rappelle aussi la valeur de  $\underline{s}_{\text{ess}}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  calculée dans le chapitre 4.

Nous avons donc montré que la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  admet des limites quand le paramètre  $\tau$  tend vers  $-\infty$  et  $+\infty$ . Ces limites sont soit  $+\infty$ , soit un  $\sigma_1(\beta)$  où l'angle  $\beta$  dépend de  $\mathbf{B}$  et de  $\alpha$ . Cette étude prouve l'existence de spectre discret sous le spectre essentiel pour  $|\tau|$  suffisamment grand dans les cas d'une droite entrante et tangente. Elle prouve aussi une estimation pour le bas du spectre de l'opérateur sur le dièdre de la forme " $s(\mathbf{B}; \alpha) \leq \sigma_1(\beta)$ ".

### 5.3 Un cas symétrique : observation numérique d'un effet tunnel

Nous nous intéressons au cas particulier  $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$ , c'est-à-dire  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = 0$ . Le potentiel plan associé est  $\underline{\mathbf{B}} = (0, 1)$  et la droite  $\Upsilon$  d'annulation du potentiel  $V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  a pour équation  $x_1 = \tau$  : elle est toujours sortante. L'opérateur que nous étudions est alors la réalisation de Neumann de

$$P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = -\Delta + (x_1 - \tau)^2 .$$

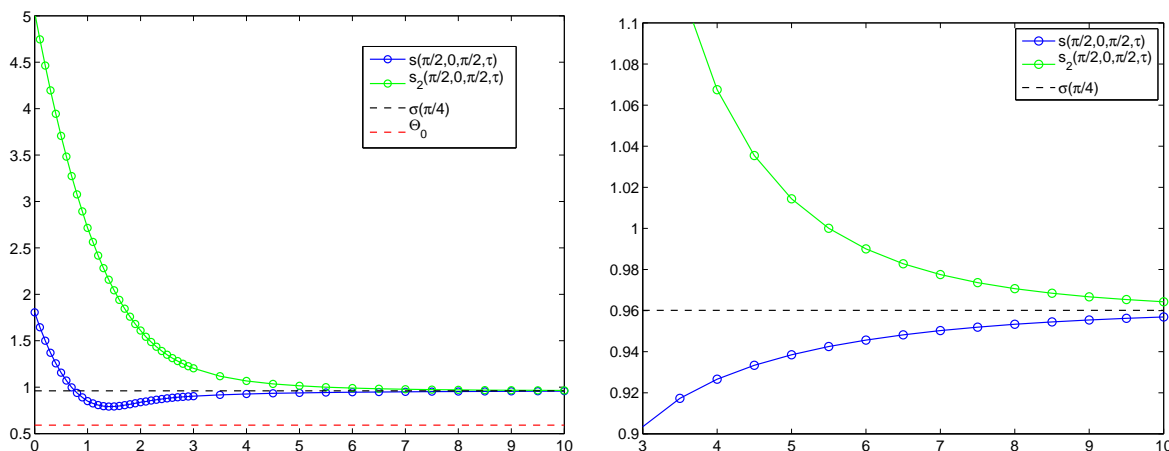


FIGURE 5.9 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = 0$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .  $\check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  et  $\check{s}_2(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\tau = \frac{k}{10}$ ,  $0 \leq k \leq 30$  puis pour  $\tau = \frac{k}{2}$ ,  $7 \leq k \leq 20$  comparé à  $\sigma_1(\frac{\pi-\alpha}{2})$  et  $\Theta_0$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(50, 20, 0.5)$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

Il s'agit d'un opérateur réel sans champ magnétique dont le potentiel électrique s'annule le long de la droite  $\Upsilon$ . Nous nous intéressons dans cette section aux deux premières valeurs propres de cet opérateur et aux vecteurs propres associés pour différentes valeurs de  $\tau$ .

Pour le champ  $\mathbf{B}$  fixé de coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ , on a en utilisant la définition de  $\sigma_1^{\text{aux}}$  (voir (4.2)) et la symétrie de la fonction  $\sigma_1$  par rapport à  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)) = \sigma_1^{\text{aux}}(\cos \frac{\alpha}{2}) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2})) = \sigma_1(\frac{\pi-\alpha}{2}). \quad (5.25)$$

La figure 5.2 adaptée à ce cas particulier permet de constater que la droite  $\Upsilon$  fait le même angle  $\frac{\pi-\alpha}{2}$  avec le bord supérieur et le bord inférieur du dièdre. De plus en utilisant la symétrie du problème, on s'attend selon les raisonnements du chapitre 1 à ce que le vecteur propre associé à  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  soit symétrique par rapport à la droite  $\{x_2 = 0\}$ . On s'attend finalement à ce que ces vecteurs propres soient concentrés le long de la droite  $\Upsilon$  d'après la proposition 4.23.

Notons  $\underline{s}_2(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  la deuxième valeur propre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  et  $\check{s}_2(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  une approximation numérique de cette quantité. Nous prenons pour les calculs  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Sur la figure 5.9 on a tracé  $\check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  et  $\check{s}_2(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  pour différentes valeurs de  $\tau$ . Lorsque  $\tau$  tend vers  $+\infty$ , on sait d'après le théorème 5.4 et (5.25) que la fonction  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  tend pour  $\tau$  grand vers  $\sigma_1(\frac{\pi-\alpha}{2})$ , ici égal à  $\sigma_1(\frac{\pi}{4})$ . On constate que la quantité  $\check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  converge vers cette valeur limite. Il semble que  $\check{s}_2(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  tend aussi vers  $\sigma_1(\frac{\pi}{4})$  par valeurs supérieures. Nous montrons la convergence dans la proposition suivante :

**Proposition 5.19.** *Soit  $\alpha \in (0, \pi)$ . On suppose que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  a pour coordonnées polaires  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  et on note  $\underline{s}_2(\gamma, \theta, \alpha, \tau)$  la deuxième valeur propre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . Alors on a*

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}_2(\gamma, \theta, \alpha, \tau) = \sigma_1(\frac{\pi-\alpha}{2}). \quad (5.26)$$

*Preuve* : Nous rappelons (cf (5.25)) que pour ce choix de paramètres on a

$$\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)) = \sigma_1(\frac{\pi - \alpha}{2}) .$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Pour  $\tau$  assez grand nous avons construit dans la preuve du théorème 5.4 le quasi-mode normalisé  $u_\tau^{\text{app}} \in C_0^\infty(\overline{\mathcal{S}_\alpha})$  qui vérifie

$$\mathcal{Q}_\tau(u_\tau^{\text{app}}) \leq \sigma_1(\frac{\pi - \alpha}{2}) + \epsilon \quad (5.27)$$

avec ici

$$\mathcal{Q}_\tau : u \mapsto \int_{\mathcal{S}_\alpha} |\nabla u|^2 + (x_1 - \tau)^2 |u|^2 dx_1 dx_2 .$$

De plus pour  $\tau$  suffisamment grand,  $u_\tau^{\text{app}}$  a son support inclus dans le demi-plan  $\{x_2 > 0\}$  (voir la figure 5.1). Soit  $v_\tau^{\text{app}}$  la fonction obtenue à partir de ce quasi-mode par symétrisation selon l'axe  $\{x_2 = 0\}$  :

$$v_\tau^{\text{app}}(x_1, x_2) := u_\tau^{\text{app}}(x_1, -x_2) .$$

On a clairement  $v_\tau^{\text{app}} \in C_0^\infty(\overline{\mathcal{S}_\alpha})$ . De plus pour  $\tau$  suffisamment grand on a

$$\text{supp}(v_\tau^{\text{app}}) \subset \{x_2 < 0\} .$$

Ainsi on a

$$\langle u_\tau^{\text{app}}, v_\tau^{\text{app}} \rangle_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)} = 0 . \quad (5.28)$$

On note en réalisant le changement de variables  $X_2 = -x_2$  que  $v_\tau^{\text{app}}$  a la même énergie que  $u_\tau^{\text{app}}$  au sens suivant :

$$\mathcal{Q}_\tau(u_\tau^{\text{app}}) = \mathcal{Q}_\tau(v_\tau^{\text{app}}) . \quad (5.29)$$

On combine (5.27) et (5.28) et on utilise le principe du min-max :

$$\underline{s}_2(\gamma, \theta; \alpha, \tau) \leq \sigma_1(\frac{\pi - \alpha}{2}) + \epsilon .$$

La minoration découle directement du théorème 5.4 □

Sur les figures 5.10 et 5.12 nous traçons les vecteurs propres associés à  $\underline{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  pour différentes valeurs de  $\tau$ . On constate que les vecteurs propres sont pairs par rapport à l'axe  $\{x_2 = 0\}$ . Ils sont concentrés le long de la droite  $\Upsilon$  comme le prévoit la proposition 4.23. Pour  $\tau$  suffisamment grand, les vecteurs propres sont localisés sur deux supports symétriques (chacun situé près d'une des deux intersections de  $\Upsilon$  et de  $\partial\mathcal{S}_\alpha$ ).

Sur les figures 5.11 et 5.13 nous traçons les vecteurs propres associés à  $\underline{s}_2(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$ . Ils présentent les mêmes propriétés que les vecteurs propres associés à la première valeur propre, à la différence qu'ils sont impairs par rapport à l'axe  $\{x_2 = 0\}$ .

D'après ces remarques, on s'attend à une situation d'effet tunnel. On observe sur la table 5.2 que pour  $\tau$  grand, les deux premières valeurs propres sont exponentiellement proches et se regroupent autour de la valeur limite  $\sigma_1(\frac{\pi}{4})$  calculée dans [BNDPR12]. En notant

$$m(\tau) := \frac{\underline{s}(\frac{\pi}{2}, 0; \frac{\pi}{2}, \tau) + \underline{s}_2(\frac{\pi}{2}, 0; \frac{\pi}{2}, \tau)}{2}$$



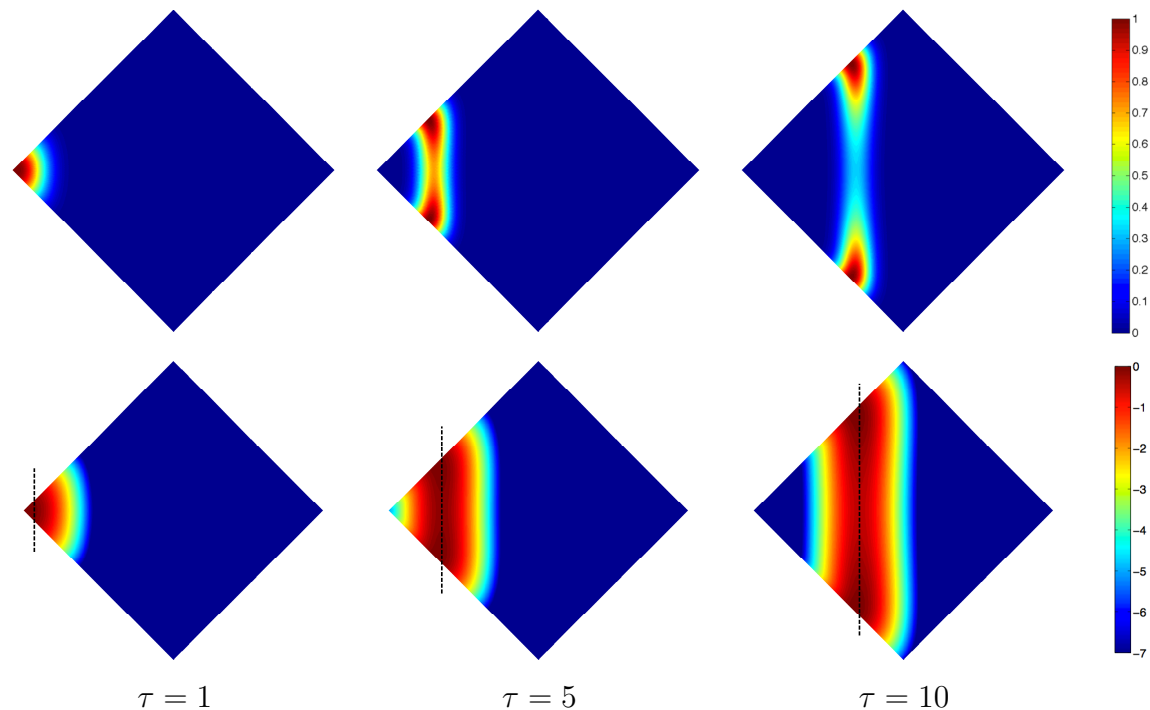


FIGURE 5.10 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = 0$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Le vecteur propre associé à  $\underline{\xi}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  et le logarithme de son module pour  $\tau = 1, 5, 10$ . Logarithme du module seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(50, 20, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

la moyenne des deux premières valeurs propres, on constate que la convergence de  $m(\tau)$  vers  $\sigma_1(\frac{\pi}{4})$  quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$  a lieu plus rapidement que la convergence des deux premières valeurs propres. On note aussi que les valeurs calculées pour  $m(\tau)$  sont inférieures à  $\sigma_1(\frac{\pi}{4})$  dès que  $\tau$  est assez grand.

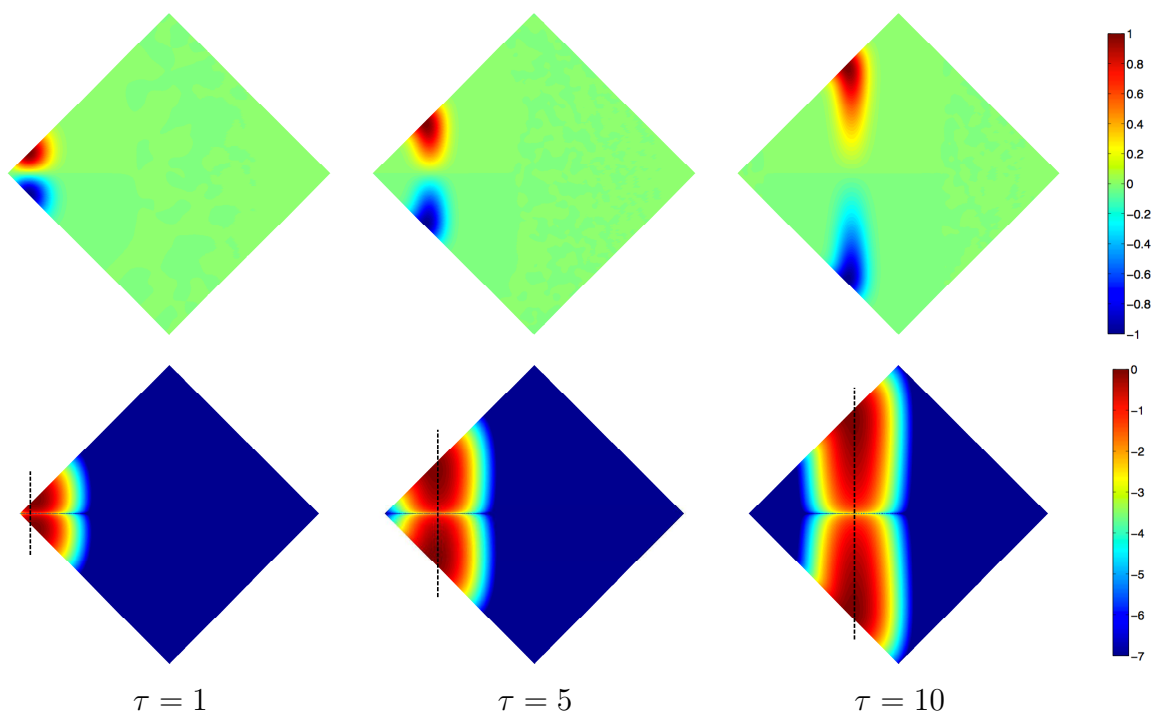


FIGURE 5.11 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = 0$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Le vecteur propre associé à  $\check{s}_2(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  et le logarithme de son module pour  $\tau = 1, 5, 10$ . Logarithme du module seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(50, 20, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

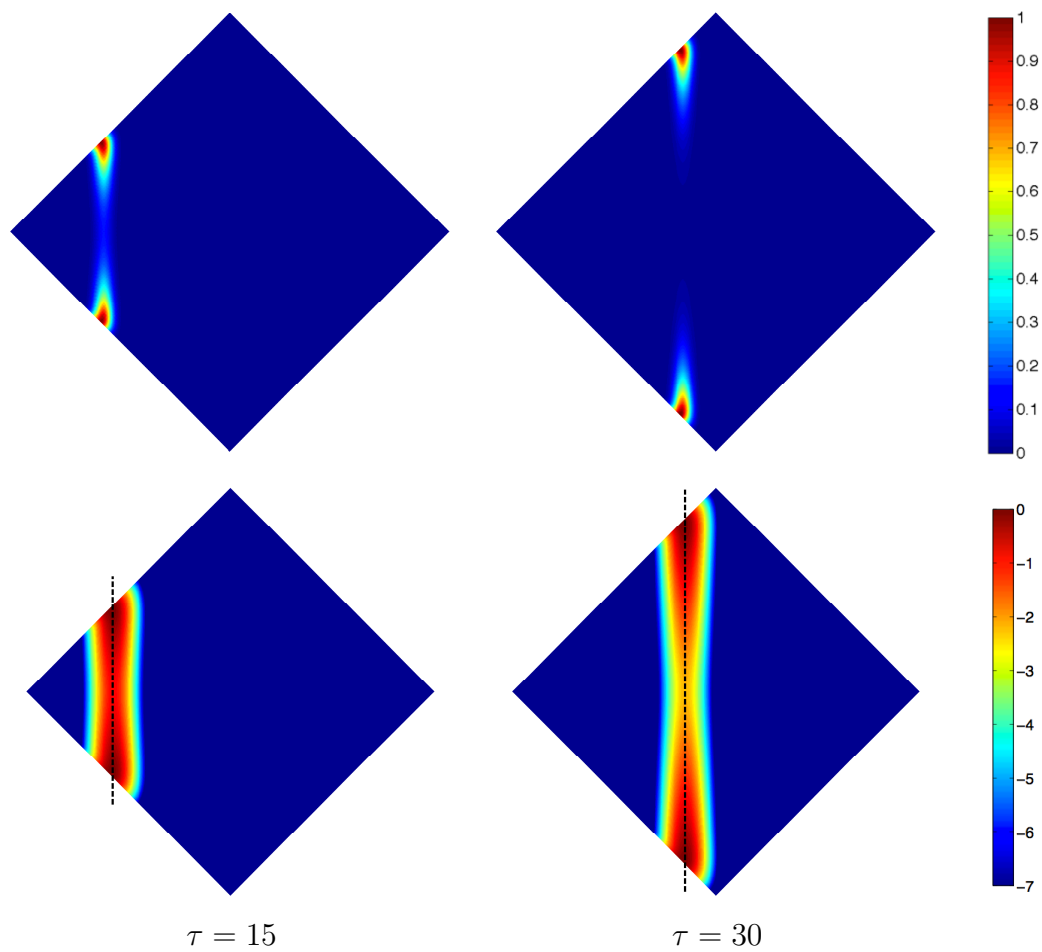


FIGURE 5.12 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = 0$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Le vecteur propre associé à  $\underline{\xi}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  et le logarithme de son module pour  $\tau = 15, 30$ . Logarithme du module seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(50, 20, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

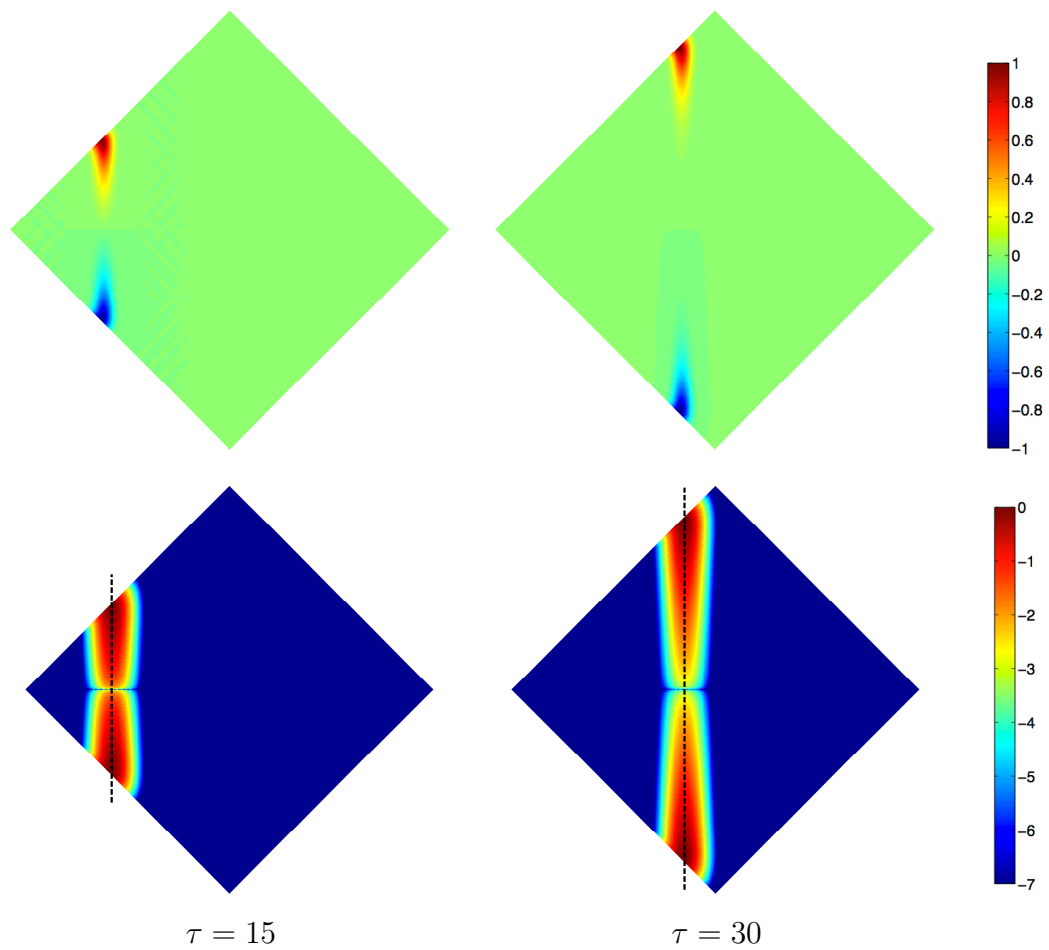


FIGURE 5.13 – Valeur des paramètres :  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta = 0$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Le vecteur propre associé à  $\underline{s}_2(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  et le logarithme de son module pour  $\tau = 15, 30$ . Logarithme du module seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . Domaine de calcul :  $\text{Los}(50, 20, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{Q}_8$ .

$\tau$	$\underline{s}(\frac{\pi}{2}, 0; \frac{\pi}{2}, \tau)$	$\underline{s}_2(\frac{\pi}{2}, 0; \frac{\pi}{2}, \tau)$	$m(\tau)$
0	1.805492194409	5.043143855614	3.424318025011
1	0.849982195033	2.715133042156	1.782557618595
5	0.938521067501	1.014393747065	0.976457407283
10	0.956917669451	0.964312234789	0.960614952120
15	0.959663157940	0.960641327925	0.960152242932
30	0.960136344347	0.960138790751	0.960137567549
50	0.960137566439	0.960137567251	0.960137566845

TABLE 5.2 – Les deux premières valeurs propres de  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + (x_1 - \tau)^2$  calculées pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\underline{\mathbf{A}} = 0$  ainsi que leur moyenne  $m(\tau)$ . Ces quantités tendent vers  $\sigma_1(\frac{\pi}{4}) = 0.960137566845$  quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ .

## Troisième partie

### Etude asymptotique pour un dièdre de petite ouverture

---

Nous rappelons que nous notons  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$  le champ magnétique en coordonnées cartésiennes avec  $b_i \geq 0$ . Nous nous intéressons dans cette partie au comportement du bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, S_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  quand l'angle d'ouverture  $\alpha$  du dièdre est petit. Nous allons discriminer notre étude à l'aide d'une condition géométrique. Le plan  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$  d'équation  $x_2 = 0$  est appelé le plan bissecteur du dièdre. Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est contenu dans  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $b_2 = 0$ . On rappelle que la droite  $\Upsilon$  est la droite d'équation  $V_{\mathbf{B}, \tau} = 0$ .

Pour  $b_2 > 0$  fixé, la droite  $\Upsilon$  vérifie la condition de la droite sortante dès que  $\alpha$  est assez petit (voir la définition 3.15). L'opérateur est alors à résolvante compacte. Si  $\tau > 0$ , on a vu que l'intersection  $\mathcal{S}_\alpha \cap \Upsilon$  est un intervalle borné quand la droite est sortante. On a alors

$$\bigcap_{\alpha > 0} (\mathcal{S}_\alpha \cap \Upsilon) = \{x\}$$

où  $x$  est le point de coordonnées  $(\frac{\tau}{b_2}, 0)$ . On s'attend à pouvoir construire des quasi-modes pour l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, S_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  à partir d'un opérateur de Schrödinger unidimensionnel défini sur  $\mathbb{R}_+$  dont le potentiel s'annule en  $\frac{\tau}{b_2}$ . Ce raisonnement est formalisé dans le chapitre 6.

Dans le cas où  $\mathbf{B} \in \mathcal{P}$ , c'est-à-dire lorsque  $b_2 = 0$ , la situation est différente : si  $\tau \neq 0$ , on a  $\bigcap_{\alpha > 0} (\mathcal{S}_\alpha \cap \Upsilon) = \emptyset$  tandis que pour  $\tau = 0$ , on a  $\bigcap_{\alpha > 0} (\mathcal{S}_\alpha \cap \Upsilon) = \{x_2 = 0, x_1 > 0\}$  : il s'agit de la bissectrice du secteur  $\mathcal{S}_\alpha$ . On s'attend à ce que les vecteurs propres de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, S_\alpha} + V_{\mathbf{B}, 0}$  "s'étalent" le long de la bissectrice du secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  quand  $\alpha$  tend vers 0. Nous étudions ce phénomène dans le chapitre 7.



# Chapitre 6

## Le cas du champ non bissecteur

Nous supposons dans ce chapitre que la deuxième composante du champ magnétique  $\mathbf{B}$  est non nulle :

**Dans tout ce chapitre, on suppose  $0 < b_2 \leq 1$ .**

Si nous notons  $(\gamma, \theta)$  les coordonnées sphériques du champ magnétique, on a alors  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ . Pour  $\theta < \frac{\pi-\alpha}{2}$ , la droite  $\Upsilon$  est sortante (voir la définition 3.15). L'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, s_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est donc à résolvante compacte dès que  $\alpha$  est assez petit d'après la proposition 4.10. Son spectre est alors constitué d'une suite de valeurs propres qui tend vers l'infini. Nous rappelons que nous avons noté  $s(\mathbf{B}; \alpha) = \lambda(\mathbf{B}; \mathcal{D}_\alpha)$  le bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique sur le dièdre et  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, s_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  sur le secteur.

La section 6.1 reprend un changement de variable issu de [Bon05] qui permet d'étudier la dépendance de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, s_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  par rapport à  $\alpha$ . Nous introduisons dans la section 6.2 la famille à un paramètre  $\mathbf{l}_\tau$  d'opérateurs unidimensionnels sur la demi-droite. Nous nous servons des résultats obtenus pour construire dans la section 6.3 des quasi-modes pour l'opérateur sur le secteur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, s_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . Ces quasi-modes permettent d'obtenir une majoration pour la quantité  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$ . Nous en déduisons une majoration pour la limite des  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  quand  $\alpha$  est petit. Dans la section 6.4, des simulations numériques appuient les résultats obtenus pour  $\alpha$  petit et illustrent le comportement des fonctions  $\alpha \mapsto s(\mathbf{B}; \alpha)$  sur tout l'intervalle  $(0, \pi)$ .

### 6.1 Changement de coordonnées

Nous travaillons avec le potentiel magnétique plan symétrique

$$\underline{\mathbf{A}}^S(x_1, x_2) = \left( -\frac{x_2}{2}b_3, \frac{x_1}{2}b_3 \right)$$

qui est bien dans  $\mathcal{A}(b_3)$ . Nous rappelons que l'opérateur s'écrit

$$P_{\underline{\mathbf{A}}^S, s_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = \left( D_{x_1} + \frac{x_2}{2}b_3 \right)^2 + \left( D_{x_2} - \frac{x_1}{2}b_3 \right)^2 + (x_1b_2 - x_2b_1 - \tau)^2$$



avec une condition de Neumann magnétique au bord :

$$\mathbf{n} \cdot (-i\nabla - \underline{\mathbf{A}}^S)u|_{\partial\mathcal{S}_\alpha} = 0$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante au bord du secteur  $\partial\mathcal{S}_\alpha$ . Nous rappelons aussi que la forme quadratique associée à  $P_{\underline{\mathbf{A}}^S, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est définie sur  $H_{\underline{\mathbf{A}}^S, V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}}^1(\mathcal{S}_\alpha)$  par

$$\mathcal{Q}_\tau(u) := \int_{\mathcal{S}_\alpha} |\nabla_{\underline{\mathbf{A}}^S} u|^2 + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} |u|^2 dx_1 dx_2 .$$

Nous allons travailler en utilisant les coordonnées polaires. On note dans la suite  $(x_1, x_2) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$  avec  $(r, \phi) \in (0, +\infty) \times (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$ . Comme dans [Bon03a, section 5.2], nous changeons de potentiel magnétique plan à l'aide de la jauge définie en coordonnées polaires par  $\varphi(r, \phi) = \frac{r^2}{2}\phi$ . Nous réalisons finalement une mise à l'échelle pour faire apparaître la dépendance en  $\alpha$  dans l'opérateur en posant  $\eta = \frac{\phi}{\alpha}$ . Nous notons

$$\psi : (x_1, x_2) \mapsto (r, \eta)$$

ce changement de variables. On a  $\psi(\mathcal{S}_\alpha) = \Omega_0$  avec

$$\Omega_0 := (0, +\infty) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) .$$

Nous notons dans la suite  $L_r^2(\Omega_0) := L^2(\Omega_0, r dr d\eta)$  l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega_0$  pour la mesure à poids  $r dr d\eta$ . On a

$$u \in L_r^2(\Omega_0) \iff u \circ \psi \in L^2(\mathcal{S}_\alpha)$$

et

$$\|u\|_{L_r^2(\Omega_0)} = \frac{1}{\alpha} \|u \circ \psi\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)} .$$

En réalisant le changement de coordonnées induit par  $\psi$  dans la forme quadratique  $\mathcal{Q}_\tau$ , on obtient (cf [Bon05, section 3]) que la forme quadratique est unitairement équivalente à la forme

$$\mathcal{Q}_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}^{\text{pol}}(u) := \int_{\Omega_0} \left( |(\partial_r - i\alpha r \eta b_3)u|^2 + \frac{1}{\alpha^2 r^2} |\partial_\eta u|^2 + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}^{\text{pol}} |u|^2 \right) r dr d\eta \quad (6.1)$$

où le potentiel dans les nouvelles coordonnées s'écrit

$$V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}^{\text{pol}}(r, \eta) := (r \cos(\eta\alpha) b_2 - r \sin(\eta\alpha) b_1 - \tau)^2 . \quad (6.2)$$

Le domaine de forme associé est

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}^{\text{pol}}) = \\ \left\{ u \in L_r^2(\Omega_0), (\partial_r - i\alpha r \eta b_3)u \in L_r^2(\Omega_0), \frac{1}{r} \partial_\eta u \in L_r^2(\Omega_0), \sqrt{V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}^{\text{pol}}} u \in L_r^2(\Omega_0) \right\} . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Nous faisons alors le raisonnement heuristique suivant : quand  $\alpha$  tend vers 0, le terme  $\frac{1}{\alpha^2 r^2} |\partial_\eta u|^2$  dans (6.1) tend vers l'infini sauf si  $\frac{1}{r} \partial_\eta u$  est petit. Pour chercher la plus petite

valeur propre de l'opérateur associé à la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}$ , nous cherchons à minimiser le terme  $\frac{1}{\alpha^2 r^2} |\partial_\eta u|^2$ . Nous restreignons la forme quadratique aux fonctions qui ne dépendent pas de la variable  $\eta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Pour une telle fonction  $u$ , on a formellement :

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}(u) = \int_0^\infty (|\partial_r u|^2 + (rb_2 - \tau)^2 |u|^2) r \, dr + O(\alpha) .$$

Nous voyons apparaître la forme quadratique d'un opérateur unidimensionnel (qui dépend de  $\tau$ ) dans un espace à poids : nous définissons la forme quadratique

$$u \mapsto \int_0^\infty (|u'|^2 + (rb_2 - \tau)^2 |u|^2) r \, dr$$

sur le domaine de forme

$$B_r^1(\mathbb{R}_+) := \{u \in L_r^2(\mathbb{R}^+), u' \in L_r^2(\mathbb{R}^+), ru \in L_r^2(\mathbb{R}^+)\} . \quad (6.4)$$

Le changement de variable  $x = b_2^{1/2} r$  montre que cette forme est unitairement équivalente à la forme

$$u \mapsto b_2 \int_0^\infty (|\partial_x u|^2 + (x - \tilde{\tau})^2 |u|^2) x \, dx$$

avec  $\tilde{\tau} = \frac{\tau}{b_2^{1/2}}$ . Nous allons étudier l'opérateur unidimensionnel associé à cette forme. Ses éléments propres nous serviront pour construire des quasi-modes pour la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}$ .

## 6.2 Etude d'un opérateur unidimensionnel

Comme plus haut nous notons classiquement  $L_r^2(\mathbb{R}^+)$  l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  pour le poids  $r \, dr$ . Pour  $u \in L_r^2(\mathbb{R}^+)$  et  $v \in L_r^2(\mathbb{R}^+)$ , nous définissons le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L_r^2} := \int_{\mathbb{R}_+} u(r) \bar{v}(r) r \, dr$$

qui fait de  $L_r^2(\mathbb{R}^+)$  un espace de Hilbert. Nous regardons la forme quadratique

$$\mathbf{q}_\tau(u) = \int_{\mathbb{R}_+} (|u'(r)|^2 + (r - \tau)^2 |u(r)|^2) r \, dr \quad (6.5)$$

définie sur le domaine  $B_r^1(\mathbb{R}_+)$  décrit en (6.4).

**Proposition 6.1.** *L'extension de Friedrichs de  $\mathbf{q}_\tau$  est*

$$\mathbf{l}_\tau := -\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r + (r - \tau)^2 \quad (6.6)$$

définie sur le domaine

$$\text{Dom}(\mathbf{l}_\tau) = \{u \in L_r^2(\mathbb{R}^+), u'' \in L_r^2(\mathbb{R}^+), \frac{1}{\sqrt{r}} u' \in L_r^2(\mathbb{R}^+), r^2 u \in L_r^2(\mathbb{R}^+), ru'(r)|_{r=0} = 0\} . \quad (6.7)$$

*Preuve :* On réalise le changement de variable  $t = \frac{r^2}{2}$ . La proposition est alors une conséquence des résultats de [BC72] (voir aussi [Bon05, sous-section 4.2]).  $\square$

**Remarque 6.2.** En notant  $x = (x_1, x_2)$  les coordonnées cartésiennes de  $\mathbb{R}^2$ , on constate que le spectre de l'opérateur  $\mathbf{L}_\tau$  se déduit de celui de l'opérateur

$$-\Delta + (|x| - \tau)^2$$

restreint aux fonctions radiales de  $\mathbb{R}^2$ . Le potentiel  $x \mapsto (|x| - \tau)^2$  s'annule sur le cercle  $\{|x| = \tau\}$ . Cet opérateur restreint aux fonctions radiales peut être vu comme l'analogue de l'opérateur de De Gennes  $\mathbf{h}_\tau^{\text{sym}}$  (voir (1.9)) en dimension 2 : la restriction à l'axe réel du potentiel  $(|x| - \tau)^2$  est exactement le potentiel  $V_\tau^{\text{sym}}$  défini en (1.8). Nous allons voir dans la suite que les deux opérateurs de Sturm-Liouville sur  $\mathbb{R}_+$  à paramètre  $\mathbf{L}_\tau$  et  $\mathbf{h}_\tau^{\text{sym}}$  présentent de nombreuses similitudes.

En utilisant les résultats de [BC72], on a le résultat suivant :

**Proposition 6.3.** *L'opérateur  $\mathbf{L}_\tau$  est à résolvante compacte.*

Puisque le domaine de  $\mathbf{L}_\tau$  ne dépend pas de  $\tau$  et que l'expression de  $\mathbf{L}_\tau$  est analytique par rapport à  $\tau$ , les valeurs propres sont continues par rapport au paramètre  $\tau$ . Nous notons  $\zeta_k(\tau)$  la  $k$ -ième valeur propre de  $\mathbf{L}_\tau$ . L'équation aux valeurs propres s'écrit alors

$$\begin{cases} -ru''(r) - u'(r) + r(r - \tau)^2 u(r) = r\zeta_k(\tau)u(r), & r > 0, \\ ru'(r)|_{r=0} = 0. \end{cases} \quad (6.8a)$$

$$(6.8b)$$

Dans le cadre d'un problème aux valeurs propres associé à un opérateur de Sturm-Liouville, la simplicité des valeurs propres peut se déduire du théorème de Cauchy (voir la section 1.1). Ici le théorème de Cauchy ne s'applique pas *stricto sensu* pour décrire les solutions de cette équation différentielle avec condition limite à cause de la singularité du poids  $r$  en 0. On démontre :

**Proposition 6.4.** *Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $k \geq 1$ ,  $\zeta_k(\tau)$  est une valeur propre simple de  $\mathbf{L}_\tau$ . De plus si  $z_{\tau,k}$  est vecteur propre associé, la fonction  $r \mapsto z_{\tau,k}(r)$  est la restriction d'une fonction analytique sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie la condition de Neumann en 0 :*

$$z'_{\tau,k}(0) = 0. \quad (6.9)$$

*Preuve :* On va montrer que l'ensemble des solutions de l'équation aux valeurs propres qui vérifient la condition limite  $ru'(r)|_{r=0} = 0$  est de dimension 1. Le point  $r = 0$  est un point singulier régulier (voir [Wag03] par exemple) de l'équation différentielle (6.8a). L'équation indicelle associée est

$$-r^2 y''(r) - ry'(r) = 0$$

et l'équation caractéristique est

$$-\nu(\nu - 1) - \nu = 0.$$

Le réel  $\nu = 0$  est donc racine double de l'équation caractéristique. Le théorème de Fuchs s'applique (voir par exemple [Wag03, théorème 2.12.13]), et nous avons le résultat suivant : l'ensemble des solutions de (6.8a) sur  $(0, +\infty)$  est un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est  $(f(r), g(r) + c \ln r)$ , où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions analytiques définies sur  $\mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$  est une constante non nulle. De plus la fonction  $r \mapsto g(r) + c \ln r$  ne vérifie pas la condition limite (6.8b). On en déduit que l'espace propre associé à  $\zeta_k(\tau)$  est de dimension 1 : il est engendré par  $f$  et les vecteurs propres sont les restrictions de fonctions analytiques sur  $\mathbb{R}$ . On déduit donc que  $z_{\tau,k}(r)$  et  $z''_{\tau,k}(r)$  se prolonge en 0 et il résulte de (6.8a) que  $z'_{\tau,k}(0) = 0$ .  $\square$

Puisque les valeurs propres sont simples et que le domaine  $\text{Dom}(\mathbf{I}_\tau)$  décrit en (6.23) ne dépend pas de  $\tau$ , les fonctions  $\tau \mapsto \zeta_k(\tau)$  sont analytiques sur  $\mathbb{R}$ , de plus en notant toujours  $z_{\tau,k}$  un vecteur propre normalisé associé à  $\zeta_k(\tau)$ , on a en dérivant l'équation aux valeurs propres par rapport à  $\tau$  (voir la proposition A.5) :

$$(\mathbf{I}_\tau - \zeta_k(\tau)) \partial_\tau z_{\tau,k} + (\partial_\tau \mathbf{I}_\tau \partial_\tau - \zeta'_k(\tau)) z_{\tau,k} = 0. \quad (6.10)$$

On déduit la formule de Feynman-Hellmann :

$$\zeta'_k(\tau) = -2 \int_{\mathbb{R}^+} (r - \tau) z_{\tau,k}^2(r) r \, dr. \quad (6.11)$$

Cette formule pour la dérivée permet d'obtenir la proposition suivante :

**Proposition 6.5.** *Pour tout  $k \geq 1$  les fonctions  $\tau \mapsto \zeta_k(\tau)$  sont strictement décroissantes sur  $(-\infty, 0)$ .*

*Preuve :* Si  $\tau < 0$ , la relation (6.11) montre que  $\zeta'_k(\tau) < 0$ .  $\square$

Dans le cas  $\tau = 0$ , en réalisant le changement de variable  $t = \frac{r^2}{2}$ , on constate que  $\mathbf{I}_0$  est unitairement équivalent à l'opérateur appelé "opérateur de Laguerre" :

$$\mathbf{I} := -2\partial_t t \partial_t + 2t, \quad t > 0 \quad (6.12)$$

défini sur le domaine  $\{u \in L^2(\mathbb{R}_+), \partial_t t \partial_t u \in L^2(\mathbb{R}_+), (tu(t))|_{t=0} = 0\}$ . On a

$$\mathfrak{S}(\mathbf{I}) = \{4k - 2, k \geq 1\}.$$

Les vecteurs propres associés sont de la forme  $P_k(t)e^{-t}$  où les polynômes  $P_k$  s'obtiennent à partir des polynômes de Laguerre. On déduit :

**Proposition 6.6.** *On a*

$$\forall k \geq 1, \quad \zeta_k(0) = 4k - 2.$$

*Les vecteurs propres associés sont de la forme*

$$P_k\left(\frac{r^2}{2}\right)e^{-r^2/2}$$

*où  $P_k$  est un polynôme de degré  $k - 1$ .*

**Remarque 6.7.** Le spectre de l'oscillateur harmonique plan

$$-\Delta + |x|^2$$

est composé des entiers de la formes  $2n$  avec  $n \geq 1$  : il s'agit des entiers pairs non nuls. Parmi ces valeurs propres, seules celles de la formes  $4n - 2$  possèdent des vecteurs propres associés radiaux. La proposition précédente peut donc se déduire de la remarque 6.2.

Nous avons une minoration pour des valeurs négatives du paramètres :

**Proposition 6.8.** *On a pour tout  $k \geq 1$  :*

$$\forall \tau < 0, \quad \zeta_k(\tau) \geq \tau^2.$$

*Preuve :* Si  $\tau < 0$ , on a  $(r - \tau)^2 \geq \tau^2$ . On déduit

$$\mathbf{q}_\tau(u) \geq \int_{\mathbb{R}^+} (|u'(r)|^2 + \tau^2 |u(r)|^2) r \, dr$$

puis

$$\frac{\mathbf{q}_\tau(u)}{\|u\|_{L^2_r(\mathbb{R}^+)}^2} \geq \tau^2.$$

On conclut avec le principe du min-max. □

**Corollaire 6.9.** *On a pour tout  $k \geq 1$  :*

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \zeta_k(\tau) = +\infty.$$

### 6.2.1 Etude asymptotique pour des grands paramètres

Nous étudions maintenant la limite quand  $\tau \rightarrow +\infty$  de la  $k$ -ième valeur propre de  $\mathbf{I}_\tau$ . Nous utilisons les techniques semi-classiques usuelles de l'approximation harmonique pour trouver le premier terme de l'asymptotique (voir [DS99] par exemple). Notre opérateur comporte deux différences par rapport au cadre habituel : d'une part le symbole principal n'est pas celui du laplacien, d'autre part nous travaillons dans un espace à poids. Nous détaillons les points de la preuve qui diffèrent à cause de ces deux faits. Pour le reste nous donnons les grandes lignes que l'on peut trouver dans [Hel88] ou [DS99].

**Proposition 6.10.** *On a*

$$\forall k \geq 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \zeta_k(\tau) = 2k - 1. \quad (6.13)$$

*Preuve :* La démonstration est inspirée de [DS99, théorème 4.23]. Nous posons  $h = \frac{1}{\tau^2}$  et après un changement d'échelle, nous sommes amenés à étudier la forme quadratique

$$\frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}_+} (h^2 |u'(r)|^2 + (r - 1)^2 |u|^2) r \, dr := \frac{1}{h} q_h(u),$$

avec

$$\text{Dom}(q_h) = B_r^1(\mathbb{R}_+).$$

**Construction de quasi-modes et majoration.** Nous faisons la remarque heuristique suivante : dans le fond du puits  $(r - 1)$  le poids  $r$  vaut à peu près 1. De plus l'opérateur

$$-h^2 \partial_r^2 + (r - 1)^2, \quad r \in \mathbb{R}$$

est isospectral à l'oscillateur harmonique (à un facteur près). Nous allons donc prendre pour quasi-modes des fonctions d'Hermite centrées dans le puits et normalisées dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ . Nous rappelons que  $\psi_k$  est la  $k$ -ième fonction d'Hermite normalisée (voir (1.25)) et nous définissons

$$u_{k,h}(r) := h^{-1/4} \psi_k \left( \frac{r-1}{\sqrt{h}} \right), \quad k \geq 1.$$

Nous confondons dans la suite les  $u_{k,h}$  et leurs restrictions à  $\mathbb{R}_+$ . Ces restrictions sont bien dans  $\text{Dom}(q_h)$  et elles vérifient pour  $i \neq j$  :

$$\langle u_{i,h}, u_{j,h} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = O(h^\infty).$$

Dans l'espace à poids on a :

$$\langle u_{i,h}, u_{j,h} \rangle_{L_r^2(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty u_{i,h}(r) u_{j,h}(r) (r-1) dr + \langle u_{i,h}, u_{j,h} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \quad (6.14)$$

$$= h^{-1/2} \int_0^\infty \psi_i \left( \frac{r-1}{\sqrt{h}} \right) \psi_j \left( \frac{r-1}{\sqrt{h}} \right) (r-1) dr + O(h^\infty) \quad (6.15)$$

$$= O(h^{1/2}), \quad (6.16)$$

la dernière égalité provenant du changement de variable  $x = \frac{r-1}{\sqrt{h}}$ . On vérifie aussi pour  $i \neq j$  que :

$$a_h(u_{i,h}, u_{j,h}) = O(h^{1/2}),$$

où  $a_h$  est la forme bilinéaire symétrique associée à  $q_h$ . On estime la norme de ces quasi-modes :

$$\|u_{k,h}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 = 1 + O(h^\infty)$$

puis comme plus haut

$$\|u_{k,h}\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 = 1 + O(h^{1/2}).$$

On évalue maintenant l'énergie :

$$q_h(u_{k,h}) = (2k-1)h + O(h^{3/2}), \quad k \geq 1. \quad (6.17)$$

On déduit par le principe du min-max et après changement d'échelle :

$$\forall k \geq 1, \quad \zeta_k(\tau) \leq 2k-1 + O\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Nous notons  $F_{k,h} = \text{vect}(u_{k,h})_{1 \leq p \leq k}$  l'espace engendré par les quasi-modes.

**Concentration des vecteurs propres.** Nous montrons que les vecteurs propres de l'opérateur se concentrent dans le puits du potentiel. Nous réalisons le changement de variable  $t = \frac{r^2}{2}$  qui montre que la forme quadratique  $q_h$  est unitairement équivalente à la forme

$$u \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+} 2t|u'(t)|^2 + (\sqrt{2t} - \tau)^2|u(t)|^2 dt. \quad (6.18)$$

L'équation eikonale associée (voir [Agm82] ou [HS85] par exemple) est

$$2t|\phi'(t)|^2 = (\sqrt{2t} - \tau)^2.$$

En la résolvant et en repassant dans la variable  $r$ , nous obtenons la distance d'Agmon associée à la forme  $q_h$  :

$$d(r) = \frac{1}{2} \left| r^2 - \sqrt{2}r + \sqrt{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} \left| \left( r - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sqrt{2} - \frac{3}{2} \right|.$$

Cette distance d'Agmon s'annule une seule fois sur  $\mathbb{R}_+$  : dans le fond du puits  $r = 1$ . Les vecteurs propres de l'opérateur associé à  $q_h$  se concentrent au fond du puits au sens suivant : pour un vecteur propre normalisé  $v_h$  associé à la  $k$ -ième valeur propre on a ( $k$  étant fixé)

$$\forall \eta \in (0, 1), \exists K_\eta > 0, \quad \|e^{\eta d/h} v_h\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)} \leq K_\eta.$$

Nous notons  $E_{k,h}$  l'espace engendré par les vecteurs propres associés aux  $k$  premières valeurs propres de  $q_h$ . Le résultat de concentration précédent permet de se servir des éléments de  $E_{k,h}$  comme de quasi-modes pour l'oscillateur harmonique. Cette procédure est classique (voir [DS99]) et a déjà été utilisée de manière détaillée dans la section 2.5, c'est pourquoi nous nous contentons d'en donner les grandes lignes. On prend une collection de  $k$  fonctions  $v_i \in E_{k,h}$  normées pour la norme  $L_r^2(\mathbb{R}_+)$  et orthogonales pour la forme sesquilinéaire associée à  $q_h$ . Nous multiplions ces fonctions par une troncature dont le support est près du puits  $r = 1$ . On note  $\chi v_i$  les fonctions tronquées. Nous prolongeons ces fonctions par 0 de manière à obtenir des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  entier. En se servant des estimations de concentrations précédentes, on obtient pour une troncature  $\chi$  bien choisie :

$$\int_{\mathbb{R}} |(\chi v_i)'|^2 + (r - 1)|\chi v_i|^2 dr \leq ((2k - 1)h + O(h^{3/2})) \|\chi v_i\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Le théorème spectral appliqué à l'oscillateur harmonique réel et aux fonctions  $\chi v_i$  permet d'obtenir  $\text{dist}(\chi v_i, F_{k,h}) = O(h^{1/2})$ , en effet  $F_{k,h}$  est engendré par les quasi-modes qui sont proches des fonctions d'Hermite et le spectre de l'opérateur  $-h^2 \partial_r^2 + (r - 1)^2$  pour  $r \in \mathbb{R}$  est composé de  $\{(2n - 1)h, n \geq 1\}$ . On a donc montré

$$\text{dist}(E_{k,h}, F_{k,h}) = O(h^{1/2}), \quad (6.19)$$

où la distance entre deux sous-espace  $E$  et  $F$  est définie au sens de [HS85] :

$$\text{dist}(E, F) := \|\Pi_E - \Pi_E \Pi_F\|$$

avec  $\Pi_E$  et  $\Pi_F$  les projections orthogonales sur  $E$  et  $F$ .

**Minoration et spectral gap.** Nous allons voir que la minoration des valeurs propres est une conséquence de (6.19). Nous définissons une partition de l'unité permettant de voir ce qu'il se passe près du puits  $r = 1$ , soit donc  $(\chi_{i,h})_{i=1,2,3}$  des fonctions infiniment dérivables vérifiant

$$\begin{cases} \forall i = 1, 2, 3, & 0 \leq \chi_i \leq 1 \\ \chi_{1,h}(r) = 1 & \text{sur } [0, 1 - 2h^{1/2}R] \text{ et } 0 \text{ si } r \geq 1 + h^{1/2}R, \\ \chi_{2,h}(r) = 1 & \text{sur } [1 - h^{1/2}R, 1 + h^{1/2}R] \text{ et } 0 \text{ si } |r - 1| \geq 2h^{1/2}R, \\ \chi_{3,h}(r) = 1 & \text{sur } [1 + 2h^{1/2}R, +\infty) \text{ et } 0 \text{ si } r \leq 1 + h^{1/2}R. \\ \sum_i \chi_{i,h}^2 = 1. \end{cases}$$

Soit  $u \in \text{Dom}(q_h)$ , on utilise la formule IMS (B.6) :

$$q_h(u) = \sum_{i=1}^3 q_h(\chi_{i,h}u) - h^2 \sum_{i=1}^3 \|\chi'_{i,h}u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 \quad (6.20)$$

Nous supposons que  $R$  vérifie  $R^2 \geq 2k - 1$ , on a alors en minorant le potentiel  $(r - 1)^2$  sur le support de  $\chi_{1,h}$  :

$$q_h(\chi_{1,h}u) \geq hR^2 \|\chi_{1,h}u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 \geq (2k - 1)h \|\chi_{1,h}u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2,$$

et de même  $q_h(\chi_{3,h}u) \geq (2k - 1)h \|\chi_{3,h}u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2$ .

On a :

$$\begin{aligned} q_h(\chi_{2,h}u) &= \int_{|r-1| \leq 2h^{1/2}R} (h^2 |\chi_{2,h}u'|^2 + (r - 1)^2 |\chi_{2,h}u|^2) r \, dr \\ &\geq (1 - 2h^{1/2}R) \int_{|r-1| \leq 2h^{1/2}R} (h^2 |\chi_{2,h}u'|^2 + (r - 1)^2 |\chi_{2,h}u|^2) \, dr. \end{aligned}$$

On suppose  $u \in E_{k-1,h}^\perp$ . En utilisant (6.19) et en suivant le raisonnement de [DS99, théorème 4.23], on voit que cela est équivalent modulo  $O(h^\infty)$  à avoir  $\chi_{2,h}u \in E_{k-1,h}^\perp$ . On rappelle que les fonctions de  $F_{k-1,h}$  sont proches modulo  $O(h^\infty)$  des fonctions d'Hermite. On a donc en utilisant à nouveau (6.19) :

$$\begin{aligned} q_h(\chi_{2,h}u) &\geq (1 - 2h^{1/2}R) ((2k - 1)h + O(h^{3/2})) \|\chi_{2,h}u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 \\ &\geq \frac{1 - 2h^{1/2}R}{1 + 2h^{1/2}R} (2k - 1 + O(h^{1/2})) h \|\chi_{2,h}u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2. \end{aligned}$$

On a de plus

$$\exists C > 0, \forall h > 0, \quad \sum_{i=1}^3 \|\chi'_{i,h}u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 \leq C(h^{1/2}R)^{-2} \|u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2.$$

La formule IMS (6.20) donne donc

$$q_h(u) \geq \left( (2k - 1)h + O(h^{3/2}R) + O(h^{3/2}) + O\left(\frac{h}{R^2}\right) \right) \|u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2.$$



En choisissant  $R = h^{-1/6}$ , on a donc montré sous l'hypothèse  $u \in E_{k-1,h}^\perp$  :

$$q_h(u) \geq ((2k-1)h + O(h^{4/3})) \|u\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)}^2.$$

On déduit du principe du min-max et après changement d'échelle :

$$\zeta_k(\tau) \geq 2k-1 + O\left(\frac{1}{\tau^{2/3}}\right)$$

et la proposition est démontrée.  $\square$

La construction de quasi-modes contenue dans cette preuve est naïve car elle ne prend pas en compte le fait que nous sommes dans un espace à poids. Nous allons réaliser une construction en puissances de  $h = \tau^{-1}$  pour obtenir une asymptotique à deux termes de  $\zeta_1(\tau)$ .

**Proposition 6.11.** *On a l'asymptotique suivante pour la première valeur propre quand le paramètre  $\tau$  est grand :*

$$\zeta_1(\tau) \underset{\tau \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right). \quad (6.21)$$

*Preuve :* Nous découpons la preuve en deux parties : nous réalisons un changement de variable qui permet de développer l'opérateur en puissances de  $h$  puis nous construisons un quasi-mode en puissances de  $h$  à partir du développement de l'opérateur.

**Changement de variables.** Nous utilisons à nouveau le changement de variables  $t = \frac{r^2}{2}$ , de sorte que l'opérateur  $\mathbf{l}_\tau$  est équivalent à l'opérateur  $\mathbf{l}_\tau^{\text{droit}}$  défini comme

$$\mathbf{l}_\tau^{\text{droit}} := -2\partial_t t \partial_t + (\sqrt{2t} - \tau)^2. \quad (6.22)$$

Le domaine de cet opérateur est (voir [BC72]) :

$$\text{Dom}(\mathbf{l}_\tau^{\text{droit}}) = \{u \in H^1(\mathbb{R}_+), tu \in H^2(\mathbb{R}_+)\}. \quad (6.23)$$

Notons que ce changement de variable permet de sortir de l'espace à poids, il sera réutilisé dans le chapitre suivant. Nous nous centrons dans le puits du potentiel en posant  $T = t - \frac{\tau^2}{2}$  et nous étudions l'opérateur unitairement équivalent :

$$-\partial_T(2T + \tau^2)\partial_T + (\sqrt{2T + \tau^2} - \tau)^2. \quad (6.24)$$

Nous normalisons l'opérateur en réalisant le changement de variable

$$x = \frac{T}{\tau},$$

de sorte que nous sommes ramenés à étudier

$$-\partial_x^2 - 2\tau^{-1}\partial_x x \partial_x + \tau(\sqrt{2x + \tau} - \sqrt{\tau})^2. \quad (6.25)$$

Introduisons le potentiel “normalisé”

$$\widetilde{V}_\tau(x) = \tau(\sqrt{2x + \tau} - \sqrt{\tau})^2.$$

En réalisant un développement limité pour  $x$  dans un voisinage de 0, on obtient :

$$\exists x_0 > 0, \exists C > 0, \forall x \in (-x_0, x_0), \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \left| \widetilde{V}_\tau(x) - \left( x^2 - \frac{x^3}{\tau} + \frac{5x^4}{4\tau^2} \right) \right| \leq C \frac{x^5}{\tau^3}.$$

Nous posons  $h = \tau^{-1}$  et nous développons l'opérateur écrit en (6.25) en puissances de  $h$ . Nous sommes ramenés à étudier l'opérateur

$$H_0 + hH_1 + h^2H_2,$$

où l'on a introduit les opérateurs

$$\begin{cases} H_0 := -\partial_x^2 + x^2 \\ H_1 := -2\partial_x x \partial_x - x^3 \\ H_2 := \frac{5x^4}{4}. \end{cases} \quad (6.26)$$

Le domaine d'intégration est  $(-\frac{1}{2}h^{-1}, +\infty)$ , nous allons pourtant faire comme si les opérateurs agissaient sur des fonctions de  $\mathbb{R}$ . Les quasi-modes construits devront ensuite être tronqués et il faudra vérifier que l'erreur commise est exponentiellement petite.

**Construction de nouveaux quasi-modes.** Nous cherchons un quasi-mode sous la forme  $u_h = u_0 + hu_1 + h^2u_2$  et une valeur propre approchée associée  $E_h = E_0 + hE_1 + h^2E_2$  vérifiant

$$\|(H_0 + hH_1 + h^2H_2)u_h - E_h u_h\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)} = o(h^2). \quad (6.27)$$

Nous sommes ainsi amenés à résoudre un système de trois équations :

$$\begin{cases} H_0 u_0 = E_0 u_0 \end{cases} \quad (6.28a)$$

$$\begin{cases} H_1 u_0 + H_0 u_1 = E_0 u_1 + E_1 u_0 \end{cases} \quad (6.28b)$$

$$\begin{cases} H_2 u_0 + H_1 u_1 + H_0 u_2 = E_2 u_0 + E_1 u_1 + E_0 u_2 \end{cases} \quad (6.28c)$$

On résout dans un premier temps (6.28a) en prenant  $E_0 = 1$  et  $u_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-\frac{x^2}{2}}$ . On retrouve ainsi la valeur limite trouvée à la proposition 6.10 et les quasi-modes utilisés. Nous projetons ensuite (6.28b) sur  $u_0$  pour trouver

$$E_1 = \langle H_1 u_0, u_0 \rangle.$$

En remarquant que  $H_1 u_0 \overline{u_0}$  est une fonction impaire, on déduit

$$E_1 = 0.$$

Décomposons  $H_1 u_0$  dans la base des fonctions d'Hermite. On note  $f_1(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}$  et  $f_3(x) = (8x^3 - 12x)e^{-x^2/2}$ . Ces fonctions se déduisent des fonctions d'Hermite  $\Psi_1$  et  $\Psi_3$  en multipliant par une constante (voir (1.25)). On a

$$-H_1 u_0 = \pi^{-1/4} (3x^3 - 4x) e^{-\frac{x^2}{2}} = \pi^{-1/4} \left( \frac{3}{8} f_3(x) + \frac{1}{4} f_1(x) \right).$$

Puisque  $f_1$  et  $f_3$  sont des fonctions propres associées aux valeurs propres 1 et 7 de  $H_0$ , nous prenons pour résoudre (6.28b) :

$$u_1(x) = \pi^{-1/4} \left( \frac{3}{48} f_3(x) + \frac{1}{8} f_1(x) \right) = \pi^{-1/4} \left( \frac{1}{2} (x^3 - x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right).$$

On calcule alors en utilisant Maple

$$\langle H_1 u_1, u_0 \rangle = -\frac{19}{16}$$

et

$$\langle H_2 u_0, u_0 \rangle = \frac{15}{16}.$$

On projette (6.28c) sur  $u_0$  pour trouver

$$E_2 = -\frac{1}{4}. \quad (6.29)$$

On peut à nouveau se servir des fonctions d'Hermite pour expliciter  $u_2$ . Nous multiplions maintenant les fonctions construites ci-dessus sur  $\mathbb{R}$  par une fonction de troncature régulière à support dans  $(-\frac{1}{2h}, +\infty)$  et valant 1 dans un voisinage fixé de 0. Puisque les fonctions construites sont des fonctions d'Hermite qui sont toutes à décroissance exponentielle, l'erreur commise en les tronquant est en  $O(h^\infty)$  et nous avons donc montré en repassant dans les coordonnées initiales l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que

$$\exists \tau_0 > 0, \forall \tau \geq \tau_0, \exists u_\tau \in \text{Dom}(\mathbf{l}_\tau), \quad \left\| \mathbf{l}_\tau u_\tau - \left( 1 - \frac{1}{4\tau^2} \right) u_\tau \right\|_{L^2_\tau(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{C}{\tau^3} \|u_\tau\|_{L^2_\tau(\mathbb{R}_+)}. \quad (6.30)$$

Nous déduisons du théorème spectral qu'il existe une valeur propre de  $\mathbf{l}_\tau$  dans l'intervalle  $(1 - \frac{1}{4\tau^2} - \frac{C}{\tau^3}, 1 - \frac{1}{4\tau^2} + \frac{C}{\tau^3})$  quand  $\tau$  est grand. Or nous avons montré

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \zeta_2(\tau) = 3.$$

On peut donc conclure :

$$\zeta_1(\tau) = 1 - \frac{1}{4\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^3}\right).$$

Cette asymptotique est illustrée sur la figure 6.5. □

**Remarque 6.12.** On a montré au théorème 1.11 que la première valeur propre  $\mu_1^N(\tau)$  de l'opérateur  $\mathbf{h}_\tau^N$  tend exponentiellement vite vers la valeur limite 1 quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ . On constate ici que la convergence de  $\zeta_1(\tau)$  n'a pas lieu de manière exponentielle. On donne une explication pour comprendre cela : le potentiel  $(x - \tau)^2$  de l'opérateur  $\mathbf{h}_\tau^N$  est exact au fond du puits au sens où il s'agit d'un potentiel quadratique. Ici l'opérateur  $\mathbf{l}_\tau^{\text{droit}} = -2\partial_t t \partial_t + (\sqrt{2t} - \tau)^2$  est unitairement équivalent à  $\mathbf{l}_\tau$ . Le potentiel  $(\sqrt{2t} - \tau)^2$  n'est pas exact dans le fond du puits, on ne peut donc pas s'attendre à une convergence exponentielle vers une valeur limite modèle.

### 6.2.2 Majorations par des quasi-modes

**Proposition 6.13.** *Rappelons que nous avons introduit en (1.19) la fonction*

$$\operatorname{erf}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau e^{-x^2} dx . \quad (6.31)$$

*On a l'estimation*

$$\forall \tau > 0, \quad \zeta_1(\tau) \leq 1 + \frac{e^{-\tau^2}}{e^{-\tau^2} + \tau\sqrt{\pi}(1 + \operatorname{erf}(\tau))} . \quad (6.32)$$

Cette majoration est illustrée sur la figure 6.3.

*Preuve :* Nous utilisons une gaussienne centrée en  $\tau$  comme quasi-mode : soit  $\psi_\tau$  la fonction définie par

$$\psi_\tau(r) = e^{-\frac{(r-\tau)^2}{2}} .$$

Nous avons  $\psi'_\tau(r) = -(r - \tau)e^{-\frac{(r-\tau)^2}{2}}$  et donc

$$\int_{\mathbb{R}^+} r |\psi'_\tau(r)|^2 dr = \int_{\mathbb{R}^+} r(r - \tau)^2 e^{-(r-\tau)^2} dr$$

puis

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\tau(\psi_\tau) &= 2 \int_{\mathbb{R}^+} r(r - \tau)^2 e^{-(r-\tau)^2} dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} (2r - \tau) e^{-(r-\tau)^2} dr . \end{aligned}$$

Nous formons le quotient de Rayleigh :

$$\frac{\mathbf{q}_\tau(\psi_\tau)}{\|\psi_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}^+)}^2} = 2 - \tau \frac{\|\psi_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2}{\|\psi_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}^+)}^2} .$$

Nous calculons la norme du quasi-mode dans l'espace à poids :

$$\begin{aligned} \|\psi_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}^+)}^2 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} 2(r - \tau) e^{-(r-\tau)^2} dr + \tau \|\psi_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 \\ &= \frac{1}{2} e^{-\tau^2} + \tau \|\psi_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 . \end{aligned}$$

En combinant ce qui précède on obtient :

$$\frac{\mathbf{q}_\tau(\psi_\tau)}{\|\psi_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}^+)}^2} = 1 + \frac{e^{-\tau^2}}{2\|\psi_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}^+)}^2} ,$$

de plus nous avons explicitement

$$\|\psi_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}^+)}^2 = \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + \operatorname{erf}(\tau)) .$$

On a donc

$$\frac{\mathbf{q}_\tau(\psi_\tau)}{\|\psi_\tau\|_{L^2_\tau(\mathbb{R}^+)}^2} = 1 + \frac{e^{-\tau^2}}{e^{-\tau^2} + \tau\sqrt{\pi}(1 + \operatorname{erf}(\tau))} .$$

Nous concluons avec le principe du min-max.  $\square$

**Corollaire 6.14.** *On a les estimations suivantes, valables pour  $\tau > 0$  :*

$$\zeta_1(\tau) \leq 2 .$$

$$\zeta_1(\tau) \leq 1 + \frac{e^{-\tau^2}}{2\sqrt{\pi}\tau} .$$

Nous utilisons maintenant des gaussiennes centrées en 0 pour majorer la première valeur propre. Nous avons l'estimation suivante :

**Proposition 6.15.** *On a une majoration de la première valeur propre :*

$$\forall \tau > 0, \quad \zeta_1(\tau) \leq \frac{\pi}{4} \frac{1}{\tau^2} + \frac{4 - \pi}{\pi} \tau^2 . \quad (6.33)$$

Cette majoration est illustrée sur la figure 6.4.

*Preuve :* Définissons pour  $\rho > 0$  le quasi-mode  $u_\rho(r) = e^{-\rho r^2}$ . On introduit le moment d'ordre  $k$  de  $u_\rho$  :

$$M_k(\rho) := \int_{\mathbb{R}^+} r^k |u_\rho(r)|^2 dr .$$

Afin d'estimer  $\mathbf{q}_\tau(u_\rho)$ , nous calculons explicitement les moments  $M_k(\rho)$  pour  $k \leq 3$ . On a

$$\begin{cases} M_0(\rho) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{2\rho}} , \\ M_1(\rho) = \frac{1}{4\rho} . \end{cases} \quad (6.34)$$

En réalisant des intégrations par parties on trouve

$$\begin{cases} M_2(\rho) = \frac{M_0(\rho)}{4\rho} = M_0(\rho)M_1(\rho) , \\ M_3(\rho) = \frac{M_1(\rho)}{2\rho} = 2M_1(\rho)^2 . \end{cases} \quad (6.35)$$

On a aussi  $u'_\rho(r) = -2\rho r u_\rho(r)$  puis :

$$\int_{\mathbb{R}^+} r u_\rho'^2(r) dr = 4\rho^2 M_3(\rho) .$$

On a donc

$$\mathbf{q}_\tau(u_\rho) = (4\rho^2 + 1)M_3(\rho) - 2\tau M_2(\rho) + \tau^2 M_1(\rho) .$$

En remarquant que  $M_1(\rho) = \|u_\rho\|_{L^2_\tau(\mathbb{R}^+)}^2$ , le quotient de Rayleigh associé à  $u_\rho$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{q}_\tau(u_\rho)}{M_1(\rho)} &= \frac{4\rho^2 + 1}{2\rho} + \tau^2 - \frac{2\tau}{4\rho} \frac{M_0(\rho)}{M_1(\rho)} \\ &= 2\rho + \frac{1}{2\rho} + \tau^2 - 2\tau M_0(\rho) \\ &= 2\rho + \frac{1}{2\rho} + \tau^2 - \tau \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} := f(\rho, \tau), \end{aligned}$$

on a

$$f(\rho, \tau) = \left( \tau - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \right)^2 + 2\rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\pi}{8\rho}.$$

Pour annuler le terme  $\left( \tau - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \right)^2$ , on prend  $\rho = \frac{\pi}{8\tau^2}$  et on a par le principe du min-max

$$\zeta_1(\tau) \leq \frac{\pi}{4} \frac{1}{\tau^2} + \frac{4 - \pi}{\pi} \tau^2. \quad (6.36)$$

□

Le membre de droite de (6.36) est minimal pour

$$\tau_{\text{qm}} = \left( \frac{\pi^2}{4(4 - \pi)} \right)^{1/4}, \quad (6.37)$$

et ce minimum vaut  $\zeta_{\text{qm}} = \sqrt{4 - \pi}$ . La valeur de  $\rho$  est alors

$$\rho_{\text{qm}} := \frac{1}{4} \sqrt{4 - \pi}. \quad (6.38)$$

On a donc obtenu à partir de la proposition précédente une majoration pour la borne inférieure de  $\zeta_1$  :

$$\inf_{\tau \in \mathbb{R}^+} \zeta_1(\tau) \leq \sqrt{4 - \pi}. \quad (6.39)$$

**Remarque 6.16.** Notons que l'on a approximativement :

$$(\tau_{\text{qm}}, \zeta_{\text{qm}}) \approx (1.3021, 0.9265). \quad (6.40)$$

En combinant la proposition 6.10 et l'estimation (6.39), on a :

**Corollaire 6.17.** *La fonction  $\zeta_1(\tau)$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$ , et ce minimum est atteint. On note*

$$\Xi_0 = \inf_{\tau \in \mathbb{R}^+} \zeta_1(\tau). \quad (6.41)$$

On a

$$\Xi_0 \leq \sqrt{4 - \pi}.$$

### 6.2.3 Caractérisation du minimum

Nous cherchons à décrire les extrema locaux de  $\zeta_1$ . On part d'une formule sur la dérivée seconde  $\zeta_k''(\tau)$ . Les techniques utilisées sont issues de l'étude de l'opérateur de Montgomery (voir [PK02], [FHP11], [HP10] ou encore [HK09]), même si nous avons une difficulté supplémentaire : il est plus difficile ici de localiser les points critiques de la fonction  $\zeta_1$ . Nous rappelons que  $z_{\tau,k}$  est un vecteur propre normalisé dans  $L^2_r(\mathbb{R}_+)$  associé à la valeur propre  $\zeta_k(\tau)$ . On différencie l'identité (6.11) et on la projette sur  $z_{\tau,k}$ . On obtient :

$$\zeta_k''(\tau) = 2 - 4 \int_{\mathbb{R}_+} (r - \tau) \partial_\tau z_{\tau,k}(r) z_{\tau,k}(r) r \, dr. \quad (6.42)$$

Nous allons chercher à estimer le terme intégral pour montrer que les extrema locaux de  $\zeta_1$  sont des minima non dégénérés. Pour améliorer la lisibilité nous introduisons ici les notations

$$z_\tau := z_{\tau,1} \quad \text{et} \quad \dot{z}_\tau := \partial_\tau z_{\tau,1}.$$

On commence par trouver une identité sur l'énergie des vecteurs propres de  $\mathbf{I}_\tau$  associés à des points critiques de  $\zeta_1$  :

**Proposition 6.18** (Viriel). *Soit  $\tau_C$  un réel tel que  $\zeta_1'(\tau_C) = 0$  et soit  $z_{\tau_C}$  un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre  $\zeta_1(\tau_C)$ . Alors on a :*

$$\int_{\mathbb{R}_+} r |z_{\tau_C}'(r)|^2 \, dr = \int_{\mathbb{R}_+} (r - \tau_C)^2 |z_{\tau_C}(r)|^2 r \, dr = \frac{\zeta_1(\tau_C)}{2}.$$

*Preuve :* On introduit l'opérateur dilaté

$$\mathbf{I}_{\tau,\ell} := -\ell^{-2} \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + (\ell r - \tau)^2, \quad \ell > 0$$

qui est unitairement équivalent à  $\mathbf{I}_\tau$ . On note  $z_\tau^\ell(r) := z_\tau(\frac{r}{\ell})$ . On a donc

$$\forall \ell > 0, \quad (\mathbf{I}_{\tau,\ell} - \zeta_1(\tau)) z_\tau^\ell = 0.$$

On différencie cette relation par rapport à  $\ell$  :

$$(\mathbf{I}_{\tau,\ell} - \zeta_1(\tau)) \partial_\ell z_\tau^\ell + \partial_\ell \mathbf{I}_{\tau,\ell} z_\tau^\ell = 0 \quad (6.43)$$

avec

$$\partial_\ell \mathbf{I}_{\tau,\ell} = 2\ell^{-3} \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + 2r(\ell r - \tau).$$

On projette l'égalité (6.43) sur  $z_\tau^\ell$  dans  $L^2_r(\mathbb{R}_+)$  et on l'évalue en  $\ell = 1$  :

$$\int_{\mathbb{R}_+} (-2|z_\tau'(r)|^2 + 2r(r - \tau)|z_\tau(r)|^2) r \, dr = 0. \quad (6.44)$$

Or d'après (6.11), on a pour un point critique  $\tau_C$

$$\int_{\mathbb{R}_+} (r - \tau_C) |z_{\tau_C}(r)|^2 r \, dr = 0$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}_+} (r - \tau_C)^2 |z_{\tau_C}(r)|^2 r \, dr = \int_{\mathbb{R}_+} r(r - \tau_C) |z_{\tau_C}(r)|^2 r \, dr . \quad (6.45)$$

Ainsi, puisque

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}_+} (|z'_\tau(r)|^2 + (r - \tau)^2 |z_\tau(r)|^2) r \, dr = \zeta_1(\tau) ,$$

on a en utilisant (6.44) et (6.45) :

$$\int_{\mathbb{R}_+} r |z'_{\tau_C}(r)|^2 \, dr = \int_{\mathbb{R}_+} (r - \tau_C)^2 |z_{\tau_C}(r)|^2 r \, dr = \frac{\zeta_1(\tau_C)}{2} .$$

□

Le lemme suivant est inspiré de [HK09] (voir aussi [HP10]) :

**Lemme 6.19.** *On rappelle que  $\dot{z}_\tau = \partial_\tau z_\tau$ . On a*

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \|\dot{z}_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{2}{\zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau)} \|(r - \tau) z_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)} .$$

*Preuve :* On différencie  $\|z_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)}^2 = 1$  par rapport à  $\tau$  et on obtient que  $\dot{z}_\tau$  est orthogonal dans  $L^2_r(\mathbb{R}_+)$  à  $z_\tau$ . Ainsi d'après le principe du min-max on a :

$$(\zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau)) \|\dot{z}_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \langle (\mathbf{I}_\tau - \zeta_1(\tau)) \dot{z}_\tau, \dot{z}_\tau \rangle_{L^2_r(\mathbb{R}_+)} .$$

On utilise l'identité (6.10) :

$$(\zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau)) \|\dot{z}_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)}^2 \leq \langle -\partial_\tau \mathbf{I}_\tau z_\tau, \dot{z}_\tau \rangle_{L^2_r(\mathbb{R}_+)} .$$

Le lemme découle alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'identité  $\partial_\tau \mathbf{I}_\tau = -2(r - \tau)$ . □

**Proposition 6.20.** *Soit  $\tau_C$  un point critique de  $\zeta_1$ . Alors on a*

$$\zeta_1''(\tau_C) \geq 2 \frac{\zeta_2(\tau_C) - 3\zeta_1(\tau_C)}{\zeta_2(\tau_C) - \zeta_1(\tau_C)} .$$

*Preuve :* On combine la relation (6.42), le lemme 6.19 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\zeta_1''(\tau_C) \geq 2 - \frac{8 \|(r - \tau) z_\tau\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)}^2}{\zeta_2(\tau_C) - \zeta_1(\tau_C)} .$$

L'identité du Viriel démontrée dans la proposition 6.18 donne

$$\zeta_1''(\tau_C) \geq 2 \frac{\zeta_2(\tau_C) - 3\zeta_1(\tau_C)}{\zeta_2(\tau_C) - \zeta_1(\tau_C)} .$$



□

On a ainsi montré que si le gap spectral est assez important, les points critiques de  $\zeta_1$  sont des minima non dégénérés. Sous cette hypothèse, il ne peut exister qu'un seul minimum local pour la fonction  $\zeta_1$ , et ce minimum est de plus global. Nous espérons dans l'avenir continuer cette étude en fournissant notamment une minoration suffisamment précise de  $\zeta_2$  pour exploiter la proposition précédente.

Nous cherchons maintenant à localiser les points critiques de  $\zeta_1$ . Nous notons  $\tau_C$  un des ces points et nous allons chercher une relation entre la valeur propre  $\zeta_1(\tau_C)$  de l'opérateur  $\mathbf{l}_{\tau_C}$  et le réel  $\tau_C$ . En réalisant la translation  $\rho = r - \tau$ , on voit que la forme quadratique  $\mathbf{q}_\tau$  définie en (6.5) est unitairement équivalente à la forme

$$u \longmapsto \int_{-\tau}^{+\infty} (|u'(\rho)|^2 + \rho^2 |u(\rho)|^2) (\rho + \tau) d\rho \quad (6.46)$$

définie sur le domaine  $B_{\rho+\tau}^1(I_\tau)$  (voir (6.4)) avec  $I_\tau = (-\tau, +\infty)$ . L'opérateur associé est

$$\mathbf{l}_\tau^{\text{tr}} := -\partial_\rho^2 - \frac{1}{\rho + \tau} \partial_\rho + \rho^2 \quad (6.47)$$

défini sur le domaine  $\text{Dom}(\mathbf{l}_\tau^{\text{tr}})$  qui se déduit directement du domaine de  $\mathbf{l}_\tau$  (décrit en (6.23)) grâce à la translation  $\rho = r - \tau$ . En particulier une fonction  $u \in \text{Dom}(\mathbf{l}_\tau^{\text{tr}})$  vérifie la condition au bord  $((\rho + \tau)u(\rho))|_{\rho=-\tau} = 0$ . Soit  $z_{\tau,k}^{\text{tr}}$  un vecteur propre normalisé de  $\mathbf{l}_\tau^{\text{tr}}$  associé à la valeur propre  $\zeta_k(\tau)$ . On déduit de la proposition 6.4 :

**Corollaire 6.21.** *Le vecteur propre  $z_{\tau,k}^{\text{tr}}$  vérifie la condition de Neumann  $(z_{\tau,k}^{\text{tr}})'(-\tau) = 0$ .*

On s'est ainsi ramené à un opérateur proche de ceux étudiés dans [DH93b] : un opérateur de Sturm-Liouville avec un poids s'annulant sur un intervalle dépendant d'un paramètre. La différence ici est que la mesure à poids  $(\rho + \tau) d\rho$  dépend du paramètre  $\tau$ . Nous essayons d'appliquer les techniques de [DH93a] pour obtenir une identité sur la dérivée de la valeur propre  $\zeta_k(\tau)$  par rapport au paramètre :

**Proposition 6.22.** *Soit  $z_{\tau,k}$  un vecteur propre normalisé de l'opérateur  $\mathbf{l}_\tau$  associé à la valeur propre  $\zeta_k(\tau)$ . Nous rappelons que  $\mathbf{h}_\tau^{\text{N}}$  est l'opérateur de de Gennes défini sur le demi-axe  $\mathbb{R}_+$  et que  $\mathbf{q}_\tau^{\text{N}}$  est la forme quadratique associée. On a :*

$$\zeta'_k(\tau) = \langle (\mathbf{h}_\tau^{\text{N}} - \zeta_k(\tau)) z_{\tau,k}, z_{\tau,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \mathbf{q}_\tau^{\text{N}}(z_{\tau,k}) - \zeta_k(\tau). \quad (6.48)$$

*Preuve :* Nous rappelons que  $\mathbf{h}_\tau^{\text{N, tr}}$  est la réalisation de Neumann de l'oscillateur harmonique sur l'intervalle  $I_\tau$  (voir la définition 1.8). L'opérateur  $\mathbf{l}_\tau^{\text{tr}}$  défini en (6.47) est unitairement équivalent à  $\mathbf{l}_\tau$  et nous rappelons que nous avons noté  $z_{\tau,k}^{\text{tr}}$  un vecteur propre associé à  $\zeta_1(\tau)$ , on a

$$z_{\tau,k}^{\text{tr}}(\rho) = z_{\tau,k}(\rho + \tau).$$

On prouve la proposition pour  $k = 1$  et on abrège les notations en posant  $z_{\tau,1}^{\text{tr}} = z_\tau^{\text{tr}}$ . Le cas général  $k \geq 1$  se prouve de la même manière. On introduit comme dans [DH93a] la quantité

$$d_\tau(h) := (\zeta_1(\tau + h) - \zeta_1(\tau)) \langle z_{\tau+h}^{\text{tr}}, z_\tau^{\text{tr}} \rangle_{L^2_{\rho+\tau}(I_\tau)}.$$

On a

$$\begin{aligned} d_\tau(h) &= \int_{-\tau}^{+\infty} (\zeta_1(\tau+h)z_{\tau+h}^{\text{tr}}(\rho)z_\tau^{\text{tr}}(\rho) - \zeta_1(\tau)z_{\tau+h}^{\text{tr}}(\rho)z_\tau^{\text{tr}}(\rho))(\rho+\tau) d\rho \\ &= \int_{-\tau}^{+\infty} \left( -(z_{\tau+h}^{\text{tr}})''(\rho) - \frac{1}{\rho+\tau+h}(z_{\tau+h}^{\text{tr}})'(\rho) + \rho^2 z_{\tau+h}^{\text{tr}}(\rho) \right) z_\tau^{\text{tr}}(\rho)(\rho+\tau) d\rho \\ &\quad - \int_{-\tau}^{+\infty} \left( -(z_\tau^{\text{tr}})''(\rho) - \frac{1}{\rho+\tau}(z_\tau^{\text{tr}})'(\rho) + \rho^2 z_\tau^{\text{tr}}(\rho) \right) z_{\tau+h}^{\text{tr}}(\rho)(\rho+\tau) d\rho. \end{aligned}$$

On réalise des intégrations par parties pour faire disparaître les termes comportant des dérivées secondes. On constate que les termes de bords sont nuls. On obtient :

$$\begin{aligned} d_\tau(h) &= \int_{-\tau}^{+\infty} (z_{\tau+h}^{\text{tr}})'(\rho)((\rho+\tau)(z_\tau^{\text{tr}})'(\rho) + z_\tau^{\text{tr}}(\rho)) - \frac{\rho+\tau}{\rho+\tau+h}(z_{\tau+h}^{\text{tr}})'(\rho)z_\tau^{\text{tr}}(\rho) d\rho \\ &\quad + \int_{-\tau}^{+\infty} -(z_\tau^{\text{tr}})'(\rho)((\rho+\tau)(z_{\tau+h}^{\text{tr}})'(\rho) + z_{\tau+h}^{\text{tr}}(\rho)) + (z_\tau^{\text{tr}})'(\rho)z_{\tau+h}^{\text{tr}}(\rho) d\rho \\ &= h \int_{-\tau}^{+\infty} \frac{1}{\rho+\tau+h}(z_{\tau+h}^{\text{tr}})'(\rho)z_\tau^{\text{tr}}(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

On a montré (voir la proposition 6.4) que les valeurs propres  $\zeta_1(\tau)$  étaient toutes simples. Or ces valeurs propres sont aussi celles de  $\mathfrak{L}_\tau^{\text{tr}}$ . Les vecteurs propres de  $\mathfrak{L}_\tau^{\text{tr}}$  sont donc analytiques par rapport au paramètre  $\tau$ . On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d_\tau(h)}{h} = \int_{-\tau}^{+\infty} \frac{1}{\rho+\tau}(z_\tau^{\text{tr}})'(\rho)z_\tau^{\text{tr}}(\rho) d\rho.$$

Puisque le vecteur propre  $z_\tau^{\text{tr}}$  est normalisé dans  $L_{\rho+\tau}^2(I_\tau)$ , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle z_{\tau+h}^{\text{tr}}, z_\tau^{\text{tr}} \rangle_{L_{\rho+\tau}^2(I_\tau)} = 1.$$

On déduit donc une expression pour la dérivée :

$$\zeta_1'(\tau) = \int_{-\tau}^{+\infty} \frac{1}{\rho+\tau}(z_\tau^{\text{tr}})'(\rho)z_\tau^{\text{tr}}(\rho) d\rho. \quad (6.49)$$

En utilisant l'équation aux valeurs propres, on a

$$\frac{(z_\tau^{\text{tr}})'(\rho)}{\rho+\tau} = -(z_\tau^{\text{tr}})''(\rho) + \rho^2 z_\tau^{\text{tr}}(\rho) - \zeta_1(\tau)z_\tau^{\text{tr}}(\rho)$$

et donc

$$\zeta_1'(\tau) = \int_{-\tau}^{+\infty} z_\tau^{\text{tr}}(\rho) \left( -(z_\tau^{\text{tr}})''(\rho) + \rho^2 z_\tau^{\text{tr}}(\rho) - \zeta_1(\tau)z_\tau^{\text{tr}}(\rho) \right) d\rho,$$

soit en réalisant une intégration par partie et en utilisant la condition de Neumann en  $\rho = -\tau$  :

$$\zeta_1'(\tau) = \int_{-\tau}^{+\infty} |(z_\tau^{\text{tr}})'(\rho)|^2 + \rho^2 |z_\tau^{\text{tr}}(\rho)|^2 - \zeta_1(\tau) |z_\tau^{\text{tr}}(\rho)|^2 d\rho.$$

Puisque  $z_\tau^{\text{tr}}$  vérifie la condition de Neumann en  $-\tau$ , on a  $z_\tau^{\text{tr}} \in \text{Dom}(\mathbf{h}_\tau^{\text{N, tr}})$ . On conclut avec une dernière intégration par partie. Une translation permet de revenir à la fonction  $z_{\tau,k}$  et d'obtenir (6.48).  $\square$

**Remarque 6.23.** Cette expression ne permet pas de conclure quant à la monotonie des fonctions  $\tau \mapsto \zeta_k(\tau)$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

On peut maintenant comparer  $\Xi_0$  à la constante  $\Theta_0$  (issue elle aussi d'un opérateur modèle unidimensionnel, voir la section 1.3 pour des rappels sur  $\Theta_0$ ). Dans la suite nous notons  $\tau_*$  un réel tel que  $\zeta_1(\tau_*) = \Xi_0$  et comme plus haut  $z_{\tau_*}$  est un vecteur propre normalisé associé.

**Proposition 6.24.** On a

$$\Theta_0 < \Xi_0. \quad (6.50)$$

*Preuve :* Comme  $\tau_*$  est un réel pour lequel  $\zeta_1(\tau)$  est minimal, on a  $\zeta_1'(\tau_*) = 0$ . La proposition 6.22 fournit

$$\zeta_1(\tau_*) = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} |z_{\tau_*}'(r)|^2 + (r - \tau_*)^2 |z_{\tau_*}(r)|^2 dr}{\|z_{\tau_*}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2}.$$

Et donc  $\zeta_1(\tau_*) \geq \mu_1^{\text{N}}(\tau_*)$ . Montrons que l'inégalité est stricte. Si ce n'est pas le cas, on a

$$\mu_1^{\text{N}}(\tau_*) = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} |z_{\tau_*}'(r)|^2 + (r - \tau_*)^2 |z_{\tau_*}(r)|^2 dr}{\|z_{\tau_*}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2}$$

et comme  $z_{\tau_*}$  vérifie la condition de Neumann, on obtient que  $z_{\tau_*}$  est un vecteur propre de  $\mathbf{h}_{\tau_*}^{\text{N}}$  associé à la valeur propre  $\mu_1^{\text{N}}(\tau_*)$ . En combinant les équations aux valeurs propres (6.8a) et (1.2), on obtient  $z_{\tau_*}' = 0$ , ce qui est une contradiction. En utilisant le fait que  $\mu_1^{\text{N}}$  a pour minimum  $\Theta_0$  on obtient

$$\Theta_0 \leq \mu_1^{\text{N}}(\tau_*) < \zeta_1(\tau_*) = \Xi_0$$

et la proposition est prouvée.  $\square$

Nous allons localiser les valeurs  $\tau_*$  pour lesquelles le minimum de  $\tau \mapsto \zeta_1(\tau)$  est atteint. Notons que nous avons montré dans la preuve précédente :

$$\mu_1^{\text{N}}(\tau_*) < \Xi_0 \quad (6.51)$$

Nous rappelons que la fonction  $\mu_1^{\text{N}}$  est strictement décroissante sur  $(-\infty, \xi_0)$  et strictement croissante sur  $(\xi_0, +\infty)$ . Puisque  $\Xi_0 \in (\Theta_0, 1)$ , nous pouvons définir les deux réels  $t_0$  et  $t_1$  tels que

$$\mu_1^{\text{N}}(t_0) = \mu_1^{\text{N}}(t_1) = \Xi_0 \quad \text{et} \quad t_0 < \xi_0 < t_1. \quad (6.52)$$

D'après (6.51) on a

$$t_0 < \tau_* < t_1.$$

Avec la valeur de  $\Xi_0$  calculée par éléments finis dans la sous-section suivante et les valeurs de  $\mu_1^{\text{N}}$  calculées numériquement dans le chapitre 1, on trouve

$$t_0 \approx 0.135 \quad \text{et} \quad t_1 \approx 1.661.$$

### Majoration de $\Xi_0$ à l'aide de quasi-modes

Nous avons montré pour l'instant  $\Xi_0 \leq \sqrt{4 - \pi}$ , nous pouvons construire de nouvelles gaussiennes pour améliorer ce résultat. On forme les quotients de Rayleigh des fonctions

$$u_{b,c}(t) := e^{-b(\rho-c)^2}.$$

On essaye différentes valeurs pour les paramètres de cette gaussienne. On choisit  $b = 0.36$ ,  $c = 0.86$  pour la fonction  $u_{b,c}$  et  $\tau = 1.51$  comme valeur du paramètre. Pour ces valeurs-là nous calculons  $\mathbf{q}_\tau(u_{b,c})$  à l'aide de Maple. Nous obtenons :

$$\frac{\mathbf{q}_\tau(u_{b,c})}{\|u_{b,c}\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)}^2} = 0.870918 \quad \text{à } 10^{-7} \text{ près.}$$

Nous pouvons ainsi déduire

$$\Xi_0 < 0.871 \quad (6.53)$$

Nous rappelons que la fonction  $\tau \mapsto m(\tau)$  définie dans la proposition 1.4 est un minorant analytique de  $\mu_1^N$ . On note  $t_0^-$  et  $t_1^+$  les deux réels tels que

$$m(t_0^-) = m(t_1^+) = 0.871. \quad (6.54)$$

Nous rappelons que  $\tau_*$  est un réel tel que  $\zeta_1(\tau_*) = \Xi_0$ . D'après (6.51), on a  $\mu_1^N(\tau_*) < \Xi_0$ . Puisque  $\mu_1^N(\tau_*) \geq m(\tau)$ , on a

$$t_0^- < \tau_* < t_1^+.$$

Ces quantités sont représentées sur la figure 6.1. Nous savons, en utilisant Maple pour calculer ces quantités, que

$$0.102 < t_0^- < t_1^+ < 1.918.$$

Nous avons donc montré :

**Proposition 6.25.** *Soit  $\tau_*$  un point tel que  $\zeta_1(\tau_*) = \Xi_0$ . Alors on a*

$$0.102 < \tau_* < 1.918. \quad (6.55)$$

### 6.2.4 Illustrations numériques

Les calculs sont fait à l'aide de la librairie d'éléments finis MELINA. On note  $\check{\zeta}_k(\tau)$  la  $k$ -ième valeur propre calculée numériquement. Nous avons approché  $\mathbb{R}_+$  par l'intervalle  $[0, 50]$ . Nous renvoyons à la sous-section 1.4.3 pour une justification de la convergence des solutions du problème sur des intervalles de la forme  $[0, L]$  vers la solution du problème sur  $\mathbb{R}_+$  quand  $L$  est grand.

Nous trouvons numériquement un unique mimum non dégénéré  $\check{\Xi}_0$  atteint en  $\check{\tau}_0$  pour les quantités  $\check{\zeta}_1(\tau)$ . On a

$$(\check{\tau}_0, \check{\Xi}_0) = (1.525, 0.86299). \quad (6.56)$$

Sur la figure 6.1, on a tracé la fonction de de Gennes  $\mu_1^N(\tau)$ , son minorant analytique  $m(\tau)$  défini dans la proposition 1.4, la constante  $\check{\Xi}_0$  calculée par éléments finis. En abscisse on a placé les réels  $t_0^-$ ,  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_1^+$  définis en (6.52) et (6.54).

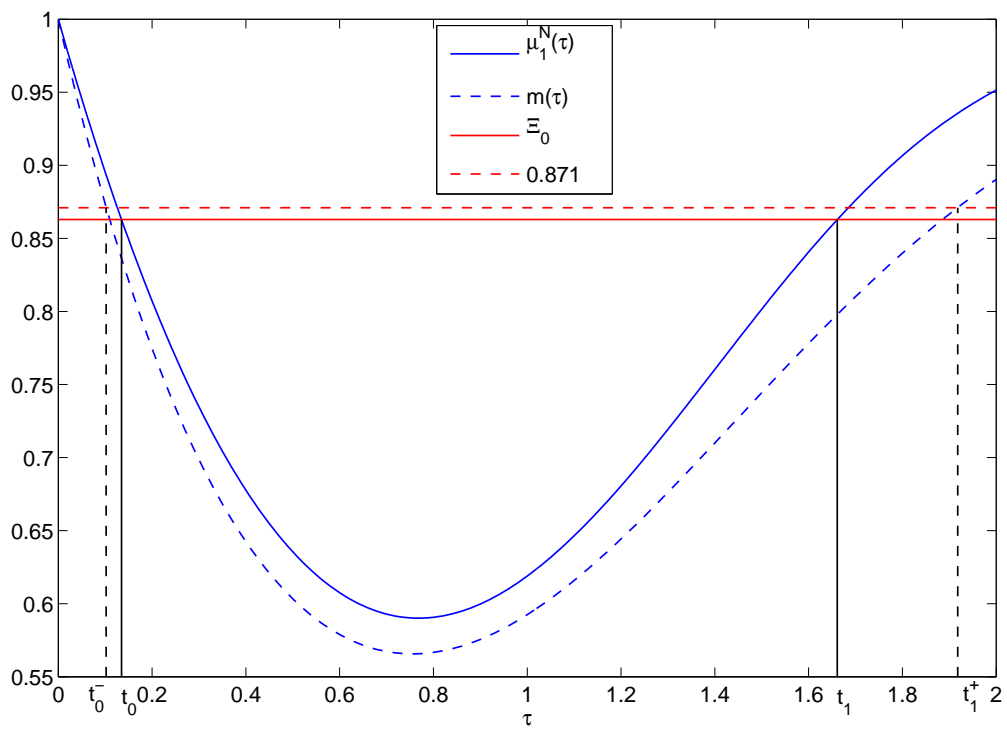


FIGURE 6.1 – La minoration de  $\mu_1^N(\tau)$  par  $m(\tau)$ , la constante  $\check{\Xi}_0$  et la valeur 0.871 (voir (6.53)). On a  $t_0^- < t_0 < t_1 < t_1^+$  où les réels  $t_0$  et  $t_1$  sont définis en (6.52) et les réels  $t_0^-$  et  $t_1^+$  sont définis en (6.54).

Sur la figure 6.2 on calcule les huit premières valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{L}_\tau$ . On constate que les limites des  $\check{\zeta}_k(\tau)$  et leurs valeurs en 0 correspondent bien à ce qui est énoncé dans les propositions 6.6 et 6.10.

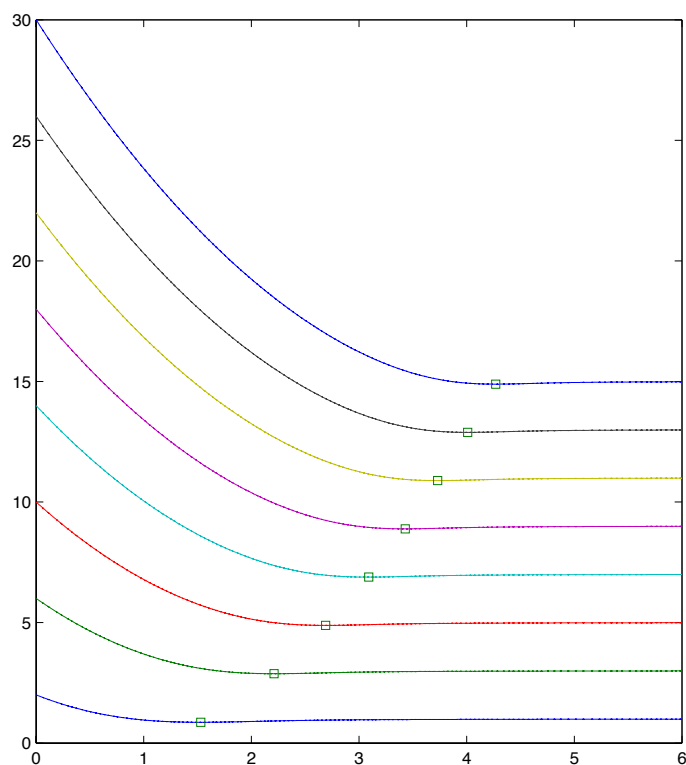


FIGURE 6.2 –  $\check{\zeta}_k(\tau)$  selon  $\tau$  pour  $\tau = \frac{n}{1000}$ ,  $0 \leq n \leq 6000$  et  $1 \leq k \leq 8$ .

Sur la figure 6.3 on trace  $\check{\zeta}_1(\tau)$  ainsi que le majorant présent dans (6.32). Sur la figure 6.4, on trace  $\check{\zeta}_1(\tau)$  pour  $\tau \in [0.5, 2]$ , la valeur  $\check{\Xi}_0$  et le majorant présent dans (6.33).

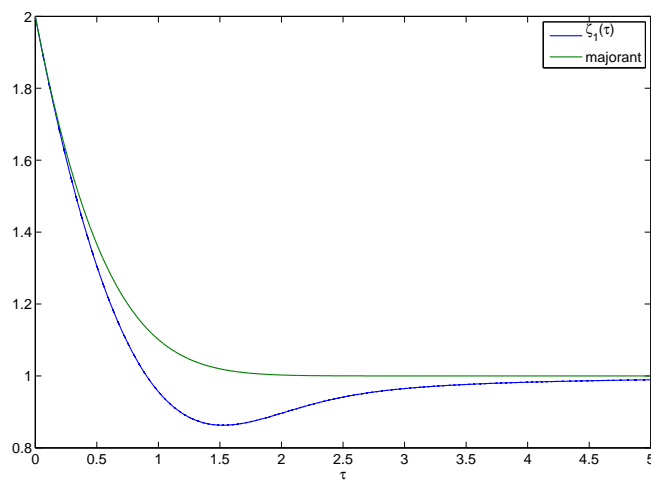


FIGURE 6.3 –  $\check{\zeta}_1(\tau)$  selon  $\tau$  sur l'intervalle  $[0, 5]$  comparé au majorant présent dans (6.32). Domaine de calcul :  $[0, 50]$ . Taille des éléments : 1. Degré :  $\mathbb{P}_{10}$ .

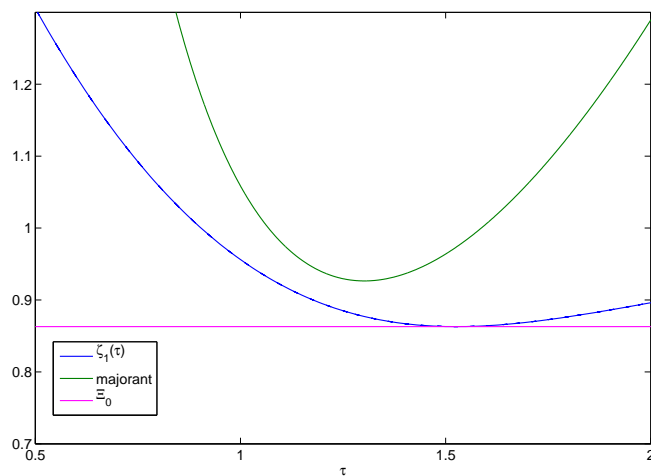


FIGURE 6.4 –  $\check{\zeta}_1(\tau)$  selon  $\tau$  sur l'intervalle  $[0.5, 2]$  comparé au majorant présent dans (6.33) et à  $\check{\Xi}_0$ . Mêmes calculs que sur la figure 6.2. Domaine de calcul :  $[0, 50]$ . Taille des éléments : 1. Degré :  $\mathbb{P}_{10}$ .

Sur la figure 6.5 nous illustrons l'asymptotique de  $\zeta_1(\tau)$  quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$  démontrée dans la proposition 6.11 :

$$\zeta_1(\tau) = 1 - \frac{1}{4\tau^2} + o\left(\frac{1}{\tau^2}\right).$$

Nous sommes amenés à calculer la valeur propre  $\zeta_1(\tau)$  pour des grandes valeurs de  $\tau$  (voir la remarques 6.12 sur la vitesse de convergence quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$ ). Puisque les fonctions propres sont concentrées dans le puits du potentiel  $(r - \tau)^2$ , nous agrandissons le domaine de calcul en approchant  $\mathbb{R}_+$  par l'intervalle  $[0, 100]$ . Nous maillons cet intervalle en prenant 100 éléments de taille 1 et de degré  $\mathbb{P}_5$ . La figure 6.5 montre le calcul de  $\tau^2(\check{\zeta}_1(\tau) - 1)$  : on constate que cette quantité converge vers  $-\frac{1}{4}$ , ce qui est cohérent avec la proposition 6.11.

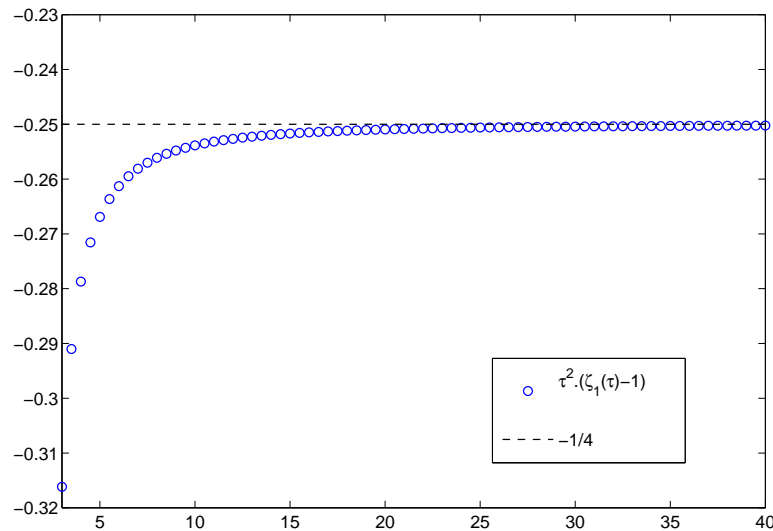


FIGURE 6.5 – La quantité  $\tau^2(1 - \check{\zeta}_1(\tau))$  selon  $\tau$  pour  $\tau = n$ ,  $0 \leq n \leq 50$  comparé à  $-\frac{1}{4}$ . Domaine de calcul :  $[0, 100]$ . Taille des éléments : 1. Degré :  $\mathbb{P}_5$ .



## 6.3 Construction de quasi-modes pour l'opérateur sur le secteur et conséquences pour le problème sur le dièdre

### 6.3.1 Construction de quasi-modes et majorations

Nous rappelons que nous souhaitons construire des quasi-modes pour la forme quadratique  $\mathcal{Q}_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}$  définie par

$$\mathcal{Q}_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}(u) := \int_{\Omega_0} \left( |(\partial_r - i\alpha r \eta b_3)u|^2 + \frac{1}{\alpha^2 r^2} |\partial_\eta u|^2 + V_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}} |u|^2 \right) r \, dr \, d\eta \quad (6.57)$$

avec

$$V_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}(r, \eta) := (r \cos(\eta\alpha) b_2 - r \sin(\eta\alpha) b_1 - \tau)^2. \quad (6.58)$$

Soit  $u \in B_r^1(\mathbb{R}_+)$  une fonction d'une variable. On a une injection

$$\iota : B_r^1(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow \text{Dom}(\mathcal{Q}_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}})$$

obtenue en étendant  $u$  sur  $\Omega_0$ , en effet on pose pour  $(r, \eta) \in \Omega_0$  :

$$\iota u(r, \eta) := u(r) \otimes \text{Id}(\eta).$$

Puisque  $\eta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , on a bien  $\|u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)} = \|\iota u\|_{L_r^2(\Omega_0)}$  :  $\iota$  est une isométrie de  $L_r^2(\mathbb{R}_+)$  vers  $L_r^2(\Omega_0)$ . Dans la suite pour une fonction  $u$  de  $B_r^1(\mathbb{R}_+)$ , on confondra  $\iota u$  et  $u$ .

**Proposition 6.26.** *Soit  $u \in B_r^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mathbf{B}$  un champ magnétique unitaire constant,  $\alpha \in (0, \pi)$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ . On rappelle que la fonction sinus cardinal est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{sinc } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ . On a :*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}(u) &= \int_{\mathbb{R}_+} (|u'(r)|^2 + (rb_2 - \tau)^2 |u(r)|^2) r \, dr + \frac{\alpha^2}{12} \|ru\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 b_3^2 \\ &+ \frac{1}{2} (1 - \text{sinc } \alpha) \|ru\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 (b_1^2 - b_2^2) + 2\tau \left(1 - \text{sinc } \frac{\alpha}{2}\right) \|\sqrt{r}u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 b_2. \end{aligned} \quad (6.59)$$

*Preuve :* On évalue  $\mathcal{Q}_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}(u)$  pour une fonction de  $B_r^1(\mathbb{R}_+)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}(u) &= \int_{\mathbb{R}_+} (|u'(r)|^2 + (rb_2 - \tau)^2 |u(r)|^2) r \, dr \\ &+ \int_{\Omega_0} \alpha^2 \eta^2 b_3^2 r^2 |u(r)|^2 r \, dr \, d\eta + \int_{\Omega_0} (V_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}(r, \eta) - (rb_2 - \tau)^2) |u(r)|^2 r \, dr \, d\eta. \end{aligned}$$

On calcule

$$\int_{\Omega_0} \alpha^2 r^2 \eta^2 b_3^2 |u(r)|^2 r \, dr \, d\eta = \frac{\alpha^2}{12} \|ru\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 b_3^2. \quad (6.60)$$

Afin de terminer l'estimation générale du quotient de Rayleigh d'une fonction de la variable  $r$ , nous calculons  $\int_{-1/2}^{1/2} V_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}(r, \eta) - (rb_2 - \tau)^2 \, d\eta$ . On développe

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{B},\tau}^{\text{pol}}(r, \eta) - (rb_2 - \tau)^2 &= (r \cos(\eta\alpha) b_2 - r \sin(\eta\alpha) b_1 - \tau)^2 - (rb_2 - \tau)^2 \\ &= r^2 \sin^2(\alpha\eta) (b_1^2 - b_2^2) - 2rb_2\tau (\cos(\alpha\eta) - 1) \\ &\quad - 2rb_1 \sin(\alpha\eta) (rb_2 \cos(\alpha\eta) - \tau). \end{aligned}$$

On remarque que le terme croisé de la deuxième ligne est impair par rapport à  $\eta$ , son intégrale sur  $\eta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  est donc nulle. On calcule alors les intégrales en  $\eta$  en utilisant la fonction  $\text{sinc } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$  :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sin^2(\alpha\eta) d\eta = \frac{1}{2}(1 - \text{sinc } \alpha) ,$$

et

$$\int_{-1/2}^{1/2} (\cos(\alpha\eta) - 1) d\eta = \text{sinc } \frac{\alpha}{2} - 1 .$$

On déduit pour  $u \in B_r^1(\mathbb{R}_+)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \left( V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}^{\text{pol}}(r, \eta) - (rb_2 - \tau)^2 \right) |u(r)|^2 r dr d\eta = \\ \frac{1}{2}(1 - \text{sinc } \alpha) \|ru\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 (b_1^2 - b_2^2) + 2\tau \left( 1 - \text{sinc } \frac{\alpha}{2} \right) \|\sqrt{r}u\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 b_2 . \end{aligned}$$

□

Nous allons évaluer  $Q_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}^{\text{pol}}$  avec des fonctions de  $B_r^1(\mathbb{R}_+)$  bien choisies et en déduire avec le principe du min-max des majorations pour  $s(\underline{\mathbf{B}}; \alpha, \tau)$ . On aura besoin du lemme suivant dont la démonstration est immédiate :

**Lemme 6.27.** *On a*

$$\forall \alpha > 0 , \quad \frac{\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^4}{120} \leq 1 - \text{sinc } \alpha \leq \frac{\alpha^2}{6} \quad \text{et} \quad 0 \leq 1 - \text{sinc } \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha^2}{24} .$$

On déduit :

**Corollaire 6.28.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que tout champ  $\mathbf{B}$  avec  $b_2 > 0$  et pour tout  $\alpha \in (0, \pi)$  :*

$$s(\mathbf{B}; \alpha) \leq \Xi_0 b_2 + C\alpha^2 .$$

*Preuve :* Nous rappelons que  $\tau_*$  est un réel où  $\zeta_1$  est minimal, c'est-à-dire

$$\zeta_1(\tau_*) = \Xi_0 .$$

On note aussi  $z_{\tau_*}$  un vecteur propre normalisé associé. On définit

$$z_{\tau_*}^{\text{sc}}(r) := b_2^{1/2} z_{\tau_*}(rb_2^{1/2})$$

de sorte que  $\|z_{\tau_*}^{\text{sc}}\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2 = 1$ . On a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left( |(z_{\tau_*}^{\text{sc}})'(r)|^2 + (rb_2 - \tau_* \sqrt{b_2}) |z_{\tau_*}^{\text{sc}}(r)|^2 \right) r dr = b_2 \Xi_0 .$$

On déduit le résultat à partir de la proposition 6.26, du lemme 6.27 et du principe du min-max. □

On a donc montré une majoration de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 0 :

**Théorème 6.29.** *Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant unitaire tel que  $b_2 > 0$ . On a*

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0} s(\mathbf{B}; \alpha) \leq \Xi_0 b_2 .$$

Le problème de déterminer la limite de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  pour  $\alpha$  petit reste ouvert. Nous émettons la conjecture suivante, appuyée par plusieurs simulations numériques dans la section suivante :

**Conjecture 6.30.** *Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant unitaire tel que  $b_2 > 0$ . On a*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} s(\mathbf{B}; \alpha) = \Xi_0 b_2 .$$

Nous rappelons que pour savoir si l'infimum sur  $\tau \in \mathbb{R}$  des  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est atteint, il nous faut comparer cette borne inférieure avec les limites pour  $|\tau|$  grand calculées dans le chapitre 5. Nous allons donner une majoration de la quantité  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  faisant intervenir des constantes explicites :

**Proposition 6.31.** *Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant unitaire avec  $b_2 > 0$ . On a pour tout  $\alpha \in (0, \pi)$  :*

$$\begin{aligned} s(\mathbf{B}; \alpha) &\leq (4 - \pi)^{1/2} b_2 \\ &+ \frac{\alpha^2}{6(4 - \pi)^{1/2}} \frac{b_3^2}{b_2} + \frac{1}{(4 - \pi)^{1/2}} (1 - \operatorname{sinc} \alpha) \frac{b_1^2 - b_2^2}{b_2} + \frac{\pi}{(4 - \pi)^{1/2}} (1 - \operatorname{sinc} \frac{\alpha}{2}) b_2 . \end{aligned} \quad (6.61)$$

*Preuve :* On évalue  $\mathcal{Q}_{\mathbf{B}, \tau}^{\text{pol}}(v)$  pour  $v(r) = e^{-\rho_{\text{qm}} b_2 r^2}$  et  $\tau = \sqrt{b_2} \tau_{\text{qm}}$  où  $\tau_{\text{qm}}$  et  $\rho_{\text{qm}}$  sont donnés par (6.37) et (6.38). On a alors en utilisant (6.34) :

$$\|v\|_{L_r^2}^2 = \frac{1}{4\rho_{\text{qm}} b_2}$$

puis

$$\frac{\int_{\mathbb{R}_+} (|v'(r)|^2 + (rb_2 - \sqrt{b_2} \tau_{\text{qm}})^2 |v(r)|^2) r \, dr}{\|v\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2} = (4 - \pi)^{1/2} b_2 .$$

On a aussi en utilisant (6.35) :

$$\begin{aligned} \frac{\|rv\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2}{\|v\|_{L_r^2(\mathbb{R}_+)}^2} &= \frac{M_3(\rho_{\text{qm}} b_2)}{M_1(\rho_{\text{qm}} b_2)} \\ &= \frac{1}{2\rho_{\text{qm}} b_2} \\ &= \frac{2}{(4 - \pi)^{1/2} b_2} . \end{aligned}$$

De même on calcule

$$\begin{aligned}
 2\tau_{\text{qm}}\sqrt{b_2}\frac{\|rv\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2}{\|v\|_{L^2_r(\mathbb{R}_+)}^2} &= 2\tau_{\text{qm}}\sqrt{b_2}\frac{M_2(\rho_{\text{qm}}b_2)}{M_1(\rho_{\text{qm}}b_2)} \\
 &= 2\tau_{\text{qm}}\sqrt{b_2}M_0(\rho_{\text{qm}}b_2) \\
 &= 2\tau_{\text{qm}}\sqrt{b_2}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\rho_{\text{qm}}b_2}} \\
 &= \tau_{\text{qm}}\frac{\sqrt{2\pi}}{(4-\pi)^{1/4}} \\
 &= \frac{\pi}{(4-\pi)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la proposition 6.26 et le principe du min-max.  $\square$

En utilisant le lemme 6.27 on déduit de la proposition précédente :

**Corollaire 6.32.** *Définissons les deux polynômes en  $\alpha$  :*

$$P_1(\alpha, b_2) := (4-\pi)^{1/2}b_2 + \left( \frac{1}{6(4-\pi)^{1/2}} \frac{1-2b_2^2}{b_2} + \frac{\pi}{24(4-\pi)^{1/2}}b_2 \right) \alpha^2 \quad (6.62)$$

et

$$P_2(\alpha, b_2) := P_1(\alpha, b_2) + \frac{1}{120(4-\pi)^{1/2}} \frac{2b_2^2-1}{b_2} \alpha^4. \quad (6.63)$$

Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant unitaire de coordonnées  $(b_1, b_2, b_3)$  avec  $b_2 > 0$ .

On a pour  $\alpha \in (0, \pi)$  :

$$b_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \implies s(\mathbf{B}; \alpha) \leq P_1(\alpha, b_2)$$

et

$$b_2 > \frac{1}{\sqrt{2}} \implies s(\mathbf{B}; \alpha) \leq P_2(\alpha, b_2).$$

*Preuve :* On utilise la proposition 6.31 en se servant de  $b_3^2 = 1 - b_1^2 - b_2^2$  et on obtient

$$\begin{aligned}
 s(\mathbf{B}; \alpha) &\leq (4-\pi)^{1/2}b_2 \\
 &+ \frac{1}{(4-\pi)^{1/2}b_2} \left( b_3^2 \left( \frac{\alpha^2}{6} - (1 - \text{sinc } \alpha) \right) + (1 - 2b_2^2)(1 - \text{sinc } \alpha) \right) + \frac{\pi}{(4-\pi)^{1/2}} (1 - \text{sinc } \frac{\alpha}{2}) b_2.
 \end{aligned} \quad (6.64)$$

On utilise le lemme 6.27 pour voir que le terme  $b_3^2 \left( \frac{\alpha^2}{6} - (1 - \text{sinc } \alpha) \right)$  est négatif. On majore alors le terme  $(1 - 2b_2^2)(1 - \text{sinc } \alpha)$  à l'aide du même lemme en distinguant les cas  $1 - 2b_2^2 \geq 0$  et  $1 - 2b_2^2 < 0$ , c'est-à-dire  $b_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $b_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .  $\square$

On en déduit une comparaison entre le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \mathcal{D}_\alpha}$  sur le dièdre et la constante fondamentale  $\Theta_0$  :

**Théorème 6.33.** *Soit  $\mathbf{B}$  constant unitaire de coordonnées  $(b_1, b_2, b_3)$  avec  $b_2\Xi_0 < \Theta_0$ . Alors il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que*

$$\forall \alpha \in (0, \alpha_0), \quad s(\mathbf{B}; \alpha) < \Theta_0.$$

On note que la constante  $\alpha_0$  se déduit du corollaire 6.32.

### 6.3.2 Conséquences sur le problème de minimisation

Nous rappelons la relation

$$s(\mathbf{B}; \alpha) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) \quad (6.65)$$

et la définition  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) = \min(\liminf_{\tau \rightarrow -\infty} \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau), \liminf_{\tau \rightarrow +\infty} \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau))$ . Nous allons comparer  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  et  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  pour  $\alpha$  petit. Pour un champ magnétique  $\mathbf{B}$  quelconque, nous rappelons que nous avons montré (voir la sous-section 5.2.4) :

$$\forall \alpha \in (0, \pi), \quad m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha) \leq s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) \quad (6.66)$$

où  $m^{\text{ana}}$  est défini par

$$m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha) := \sqrt{(1 - \Theta_0^2) \left( b_2^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - b_1 b_2 \sin \alpha + b_1^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \Theta_0^2}.$$

On donne des conditions suffisantes pour avoir  $s(\mathbf{B}; \alpha) < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  :

**Lemme 6.34.** *On rappelle que les polynômes  $P_1$  et  $P_2$  sont définis dans le corollaire 6.32.*

(a) *Supposons  $b_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\alpha \in (0, \pi)$  tel que*

$$P_1(\alpha, b_2) < m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha). \quad (6.67)$$

*Alors la borne inférieure sur  $\tau \in \mathbb{R}$  des  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est atteinte.*

(b) *Supposons  $b_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\alpha \in (0, \pi)$  tel que*

$$P_2(\alpha, b_2) < m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha). \quad (6.68)$$

*Alors la borne inférieure sur  $\tau \in \mathbb{R}$  des  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est atteinte.*

On déduit un résultat important :

**Théorème 6.35.** *Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constante unitaire avec  $b_2 > 0$ . Pour  $\alpha$  assez petit on a*

$$s(\mathbf{B}; \alpha) < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha).$$

*Preuve :* On a la comparaison élémentaire suivante :

$$\forall b_2 \in [0, 1], \quad (4 - \pi)^{1/2} b_2 < \sqrt{(1 - \Theta_0^2) b_2^2 + \Theta_0^2},$$

autrement dit on a pour  $i \in \{1, 2\}$  :

$$P_i(\mathbf{B}; 0) < m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; 0).$$

Par continuité les conditions (6.67) et (6.68) sont vérifiées pour  $\alpha$  assez petit. On déduit le théorème à partir du lemme 6.34.  $\square$

Nous notons

$$\alpha_m(\mathbf{B}) := \sup\{\alpha_* \in (0, \pi), \forall \alpha \leq \alpha_*, s(\mathbf{B}; \alpha) < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)\} \quad (6.69)$$

et

$$\alpha_m^{\text{ana}}(\mathbf{B}) := \sup\{\alpha_* \in (0, \pi), \forall \alpha \leq \alpha_*, P_i(\mathbf{B}; \alpha) < m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha)\} \quad (6.70)$$

où  $i = 1$  si  $b_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $i = 2$  si  $b_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . D'après le lemme 6.34 on a

$$\alpha_m^{\text{ana}}(\mathbf{B}) \leq \alpha_m(\mathbf{B}) .$$

Les quantités intervenant dans les inégalités (6.67) et (6.68) sont analytiques, on se sert donc du logiciel Mathematica et de la valeur approchée de  $\Theta_0$  fournie par [BN12] pour estimer avec précision  $\alpha_m^{\text{ana}}(\mathbf{B})$ . Dans le cas particulier  $b_2 = 1$ , c'est-à-dire  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ , on trouve  $\alpha_m^{\text{ana}}(\mathbf{B}) \approx 1.2035$  et on a

$$\forall \alpha \in (0, 1.2035), \quad s(\frac{\pi}{2}, 0; \alpha) < s^\infty(\frac{\pi}{2}, 0; \alpha) . \quad (6.71)$$

Dans le cas de la droite tangente, on a vu dans le théorème 5.16 que la borne inférieure des  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est atteinte en un  $\tau_* \in \mathbb{R}$ , mais que la valeur  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau_*)$  ne correspond pas toujours à du spectre discret pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  en général. On peut énoncer un résultat partiel :

**Théorème 6.36.** *Supposons que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  vérifie la condition de la droite tangente et soit  $\underline{\mathbf{A}} \in \mathcal{A}(b_3)$ . Si le couple  $(\alpha, b_2)$  vérifie  $b_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $P_1(\alpha, b_2) < \Theta_0$ , alors la valeur  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau_*)$  correspond à du spectre discret pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ .*

Les hypothèses du théorème s'appliquent en particulier si  $b_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  et si l'angle  $\alpha$  est assez petit.

## 6.4 Simulations numériques : approximation de valeurs propres de l'opérateur sur le dièdre

Nous illustrons les fonctions  $\alpha \mapsto s(\mathbf{B}; \alpha)$  à l'aide de calculs par éléments finis. Encore une fois nous notons  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  une approximation numérique de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  et nous nous inspirons de la relation (3.18) pour définir une approximation de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  :

$$\check{s}(\mathbf{B}; \alpha) := \inf_{\tau} \check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau) .$$

On prend différents champs magnétiques  $\mathbf{B}$  vérifiant  $b_2 > 0$ . Dans la sous-section 6.4.1, nous prenons  $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$ , soit en coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  : le champ magnétique est perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre et la droite  $\Upsilon$  est sortante pour tout  $\alpha \in (0, \pi)$ . Ce choix des paramètres correspond aux calculs réalisés dans la section 5.3. On a  $\underline{\mathbf{A}} = 0$  et l'opérateur sur le secteur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est réel. Il est à résolvante compacte pour toute valeur de  $\alpha \in (0, \pi)$  d'après la proposition 4.10. Dans la section 6.4.2, nous prenons  $\mathbf{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ , soit en coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ . Le champ magnétique est perpendiculaire à l'arête du dièdre mais pas au plan bissecteur du dièdre. L'opérateur sur le secteur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est encore réel. Le champ magnétique est tangent pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et l'opérateur possède du spectre essentiel si  $\alpha \geq \pi - 2\theta$ , soit ici  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$  (voir la proposition 4.14). Dans la sous-section 6.4.3, nous prenons  $\mathbf{B} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,

soit en coordonnées sphériques  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ . L'opérateur  $P_{\underline{A}, S_\alpha} + V_{\underline{B}, \tau}$  possède cette fois-ci une partie imaginaire. Le champ magnétique est tangent pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et encore une fois l'opérateur  $P_{\underline{A}, S_\alpha} + V_{\underline{B}, \tau}$  possède du spectre essentiel si  $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ .

Pour ces trois cas, nous réalisons les calculs pour différentes valeurs de  $\alpha \in (0, \pi)$  en nous concentrant en particulier sur le comportement de  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  pour  $\alpha$  petit et pour  $\alpha$  proche de  $\pi - 2\theta$ , c'est-à-dire lorsque le dièdre est de petite ouverture et lorsque le champ magnétique est proche d'un champ tangent au dièdre. Dans les trois cas nous constatons que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \check{s}(\mathbf{B}; \alpha) = b_2 \Xi_0$ .

Nous rappelons que nous avons calculé une expression pour  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  dans le chapitre 5 :

$$s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta)) \quad \text{dans le cas d'un champ non tangent}$$

et

$$s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) = \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \alpha) \quad \text{dans le cas d'un champ tangent} .$$

Les valeurs de  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  sont calculées à partir de ces expressions, de la définition de la fonction  $\sigma_1^{\text{aux}}(x) = \sigma_1(\arcsin x)$  et des valeurs numériques calculées pour  $\sigma_1$  dans [BNDPR12] (voir aussi le chapitre 2). Sur les graphes nous allons comparer  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  et  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  lorsque le champ  $\mathbf{B}$  n'est pas tangent au dièdre en traçant  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta))$ . Dans le cas d'un champ tangent au dièdre, nous avons démontré (voir le théorème 5.16) que  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) < s(\mathbf{B}; \alpha)$ , en effet d'après le corollaire 4.18 et les calculs de limites du chapitre 5, on a pour un champ qui vérifie la condition de la droite tangente

$$s(\mathbf{B}; \alpha) \leq \Theta_0 < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) .$$

### 6.4.1 Cas d'un champ perpendiculaire au plan bissecteur

Sur la figure 6.6, nous avons pris  $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$ , c'est-à-dire  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = 0$ . Le champ magnétique est perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre : nous sommes dans la situation déjà étudiée dans la section 5.3 et l'opérateur sur le secteur  $P_{\underline{A}, S_\alpha} + V_{\underline{B}, \tau}$  est à résolvante compacte pour toute valeur de  $\alpha$ . Lorsque  $\alpha$  tend vers 0,  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  converge vers  $\Xi_0$ , cf. table 6.1. Ceci appuie la conjecture 6.30. On constate que  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  décroît avec  $\alpha$  de  $\Xi_0$  jusqu'à  $\Theta_0$  (voir aussi la proposition 8.14). On démontre dans [PR12] que  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  décroît avec  $\alpha$ . Ceci contraste avec la conjecture de la croissance de  $\mu(\alpha)$  (voir [ABN06] ou [BNDMV07]). On a aussi tracé le majorant analytique  $P_2(\alpha, b_2)$  de  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  fourni par le corollaire 6.32. On trace la fonction  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$ , ici égale à  $\sigma_1(\frac{\pi-\alpha}{2})$  et son minorant analytique  $m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha)$  fourni par le corollaire 5.6. Nous rappelons que nous avons montré  $s(\mathbf{B}; \alpha) < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  pour  $\alpha$  assez petit. Nous avons placé en abscisse le réel  $\alpha_m^{\text{ana}}(\mathbf{B})$  : il s'agit du plus grand réel tel que l'inégalité  $P_2(\alpha, b_2) < m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha)$  est vérifiée. On a  $\alpha_m^{\text{ana}}(\mathbf{B}) \approx 1.20351$ . On constate que la zone  $(0, \alpha_m)$  pour laquelle la relation  $s(\mathbf{B}; \alpha) < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  est vraie semble être tout l'intervalle  $(0, \pi)$ .

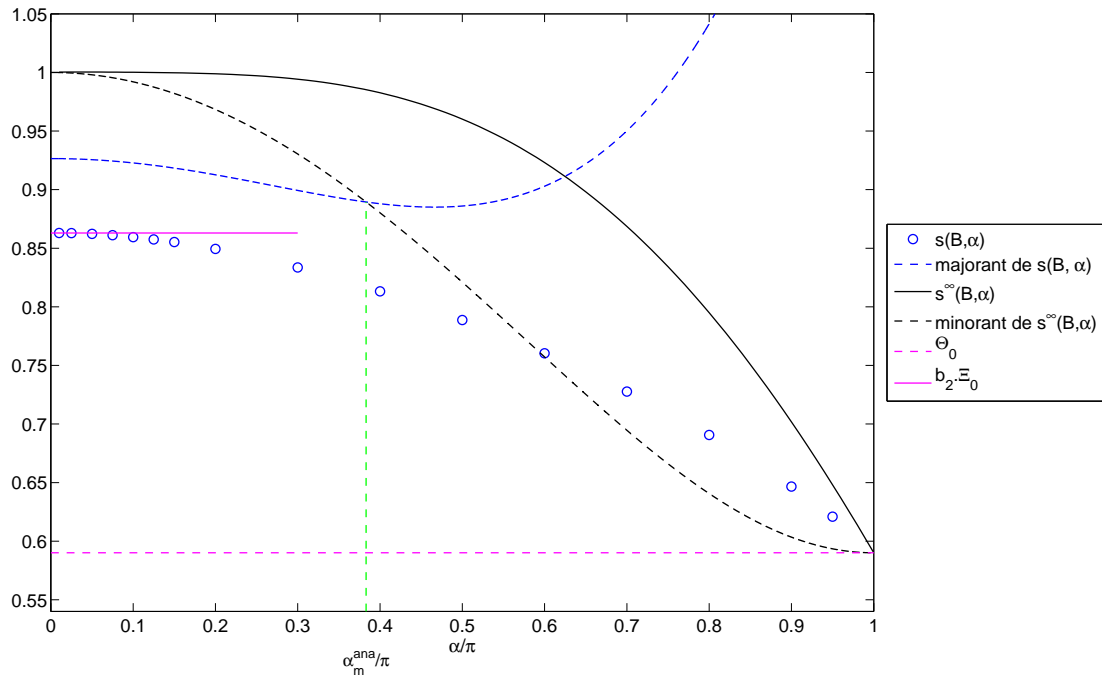


FIGURE 6.6 – Valeurs des paramètres :  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ , soit  $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$ .  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  selon  $\frac{\alpha}{\pi}$  comparé au majorant  $P_2(\alpha, b_2)$  défini en (6.62), à la quantité  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  donnée par le théorème 5.4 et au minorant  $m^{\text{ana}}$  de  $s^\infty$  fourni par (6.66), ainsi qu’aux constantes  $\Theta_0$  et  $\Xi_0 b_2$ .

$\alpha/\pi$	$\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$
0.010	0.86296
0.025	0.86293
0.050	0.86225
0.075	0.86115
0.100	0.85949
0.125	0.85754
0.150	0.85529
0.200	0.84941

TABLE 6.1 – Valeurs des paramètres :  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ . Convergence de  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  vers  $\Xi_0 \approx 0.86299$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0.



Nous rappelons la relation  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha) := \inf_{\tau} \check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$ . Sur les figures 6.7 et 6.8, nous traçons les valeurs de  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Nous comparons ces valeurs à la fonction  $\tau \mapsto \check{\zeta}_1(\tau)$  calculée par éléments finis dans la sous-section 6.2.4 (dans ce paragraphe on confond  $\check{\zeta}_1$  et  $\zeta_1$ ). On constate que pour  $\alpha = \frac{\pi}{10}$ , les valeurs de  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  sont proches de  $\check{\zeta}_1(\tau)$ , en particulier la valeur inférieure des  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est proche de  $\check{\Xi}_0$ . On remarque sur la figure 6.8 que pour  $\alpha = \frac{\pi}{10}$ , la valeur de  $\tau$  pour laquelle  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est minimal est proche de l'approximaton  $\check{\tau}_0$  calculée dans la sous-section 6.2.4, où  $\check{\tau}_0$  vérifie  $\check{\zeta}_1(\check{\tau}_0) = \check{\Xi}_0$ .

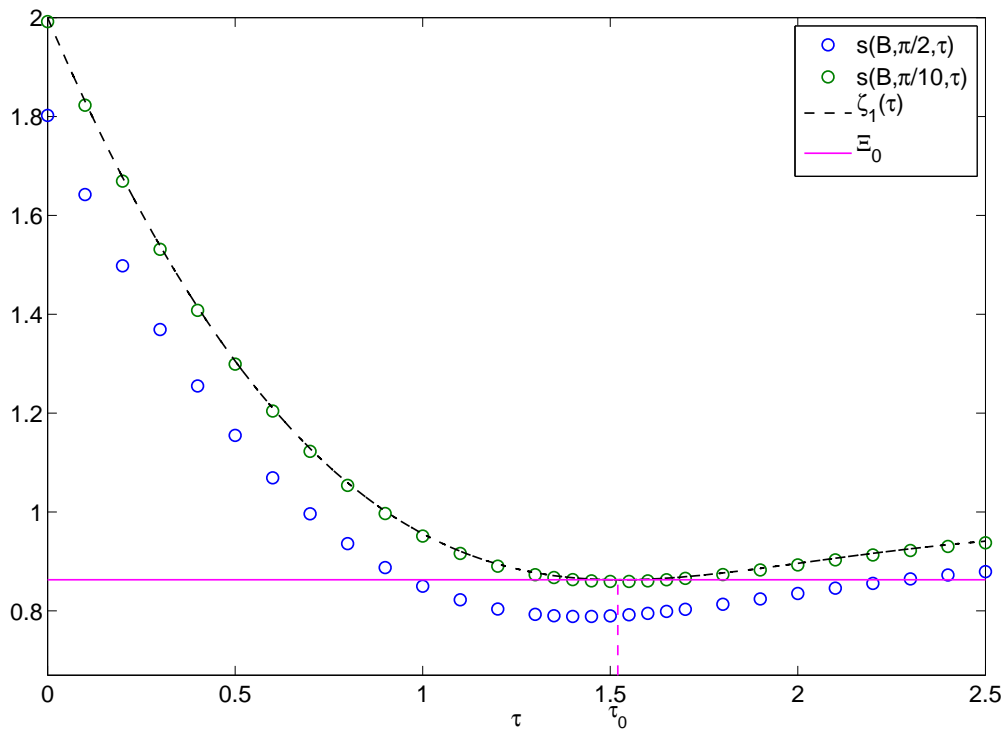


FIGURE 6.7 – Valeurs des paramètres :  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  et  $\alpha \in \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\}$ .  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\tau = k/10$  avec  $0 \leq k \leq 35$  puis pour  $\tau = k/20$  avec  $25 \leq k \leq 35$  comparé à  $\check{\zeta}_1(\tau)$  et  $\Xi_0$ .

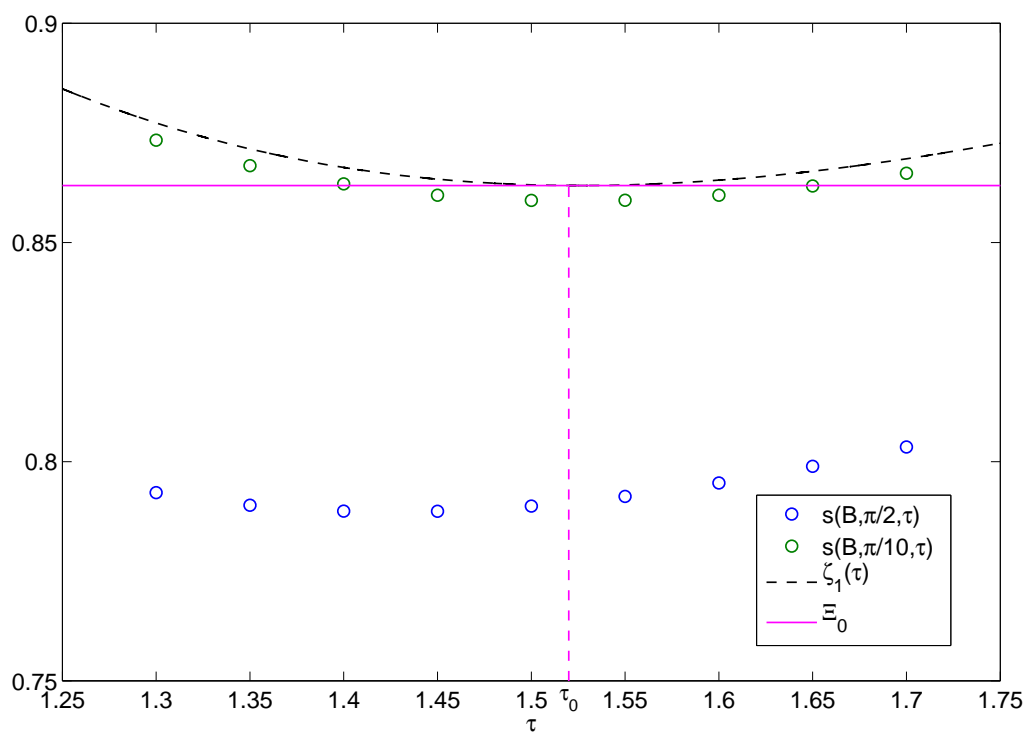


FIGURE 6.8 – Valeur des paramètres :  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  et  $\alpha \in \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\}$ .  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\tau = k/20$  avec  $25 \leq k \leq 35$  comparé à  $\zeta_1(\tau)$  et  $\Xi_0$ .

### 6.4.2 Cas d'un champ perpendiculaire à l'arête

Sur les figures 6.9 et 6.10, on a pris  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , soit en coordonnées cartésiennes  $\mathbf{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ . L'opérateur associé sur le secteur  $P_{\mathbf{A}, s_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  est réel et la droite  $\Upsilon$  est respectivement sortante, tangente puis entrante pour  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ . En particulier pour  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , l'opérateur sur le secteur est à résolvante compacte.

On voit que  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  converge vers  $b_2 \Xi_0$  par valeurs supérieures quand  $\alpha$  tend vers 0. On a tracé le majorant analytique  $P_1(\alpha, b_2)$  donné en (6.63). On compare ces calculs à la fonction  $\alpha \mapsto \sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin(\frac{\alpha}{2} + \theta))$  qui correspond à  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  pour un champ non tangent. On a aussi tracé le minorant  $m^{\text{ana}}$  de  $s^\infty$  fourni par (6.66). On a noté  $\alpha_m^{\text{ana}}$  le plus grand réel tel que  $P_1(\alpha, b_2) < m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha)$  pour tout  $\alpha \in (0, \alpha_m^{\text{ana}})$ . Ici on a  $\alpha_m^{\text{ana}} \approx 0.629$ . La majoration stricte  $s(\mathbf{B}; \alpha) < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  est démontrée sur  $(0, \alpha_m)$  et donc  $\alpha_m^{\text{ana}} \leq \alpha_m$ . On constate que pour tout  $\alpha \in (0, \pi)$  on a  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha) < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  : il semble que l'on a encore  $\alpha_m = \pi$ . Sur la figure 6.10, on a zoomé sur la zone proche du champ tangent, c'est-à-dire pour  $\alpha$  proche de  $\frac{\pi}{2}$ . On a

$$\check{s}(\mathbf{B}; \frac{\pi}{2}) \approx \Theta_0 \quad (6.72)$$

ce qui illustre bien le théorème 4.21. Il semble de plus d'après ces calculs que la fonction  $\alpha \mapsto s(\mathbf{B}; \alpha)$  n'est pas dérivable en  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

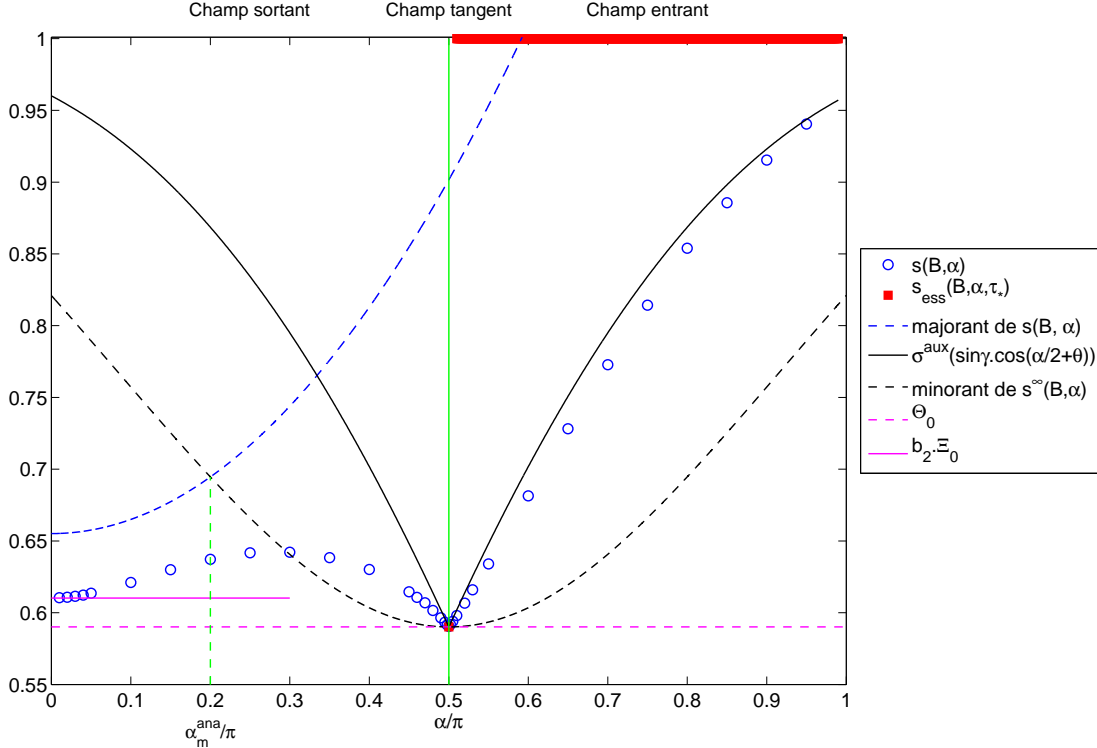


FIGURE 6.9 – Valeurs des paramètres :  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ , soit  $\mathbf{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ .  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  selon  $\frac{\alpha}{\pi}$  comparé au majorant  $P_1(\alpha, b_2)$  défini en (6.63), à la quantité  $\sigma^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta))$  et à son minorant  $m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha)$  fourni par (6.66), ainsi qu'aux constantes  $\Theta_0$  et  $\Xi_0 b_2$ .

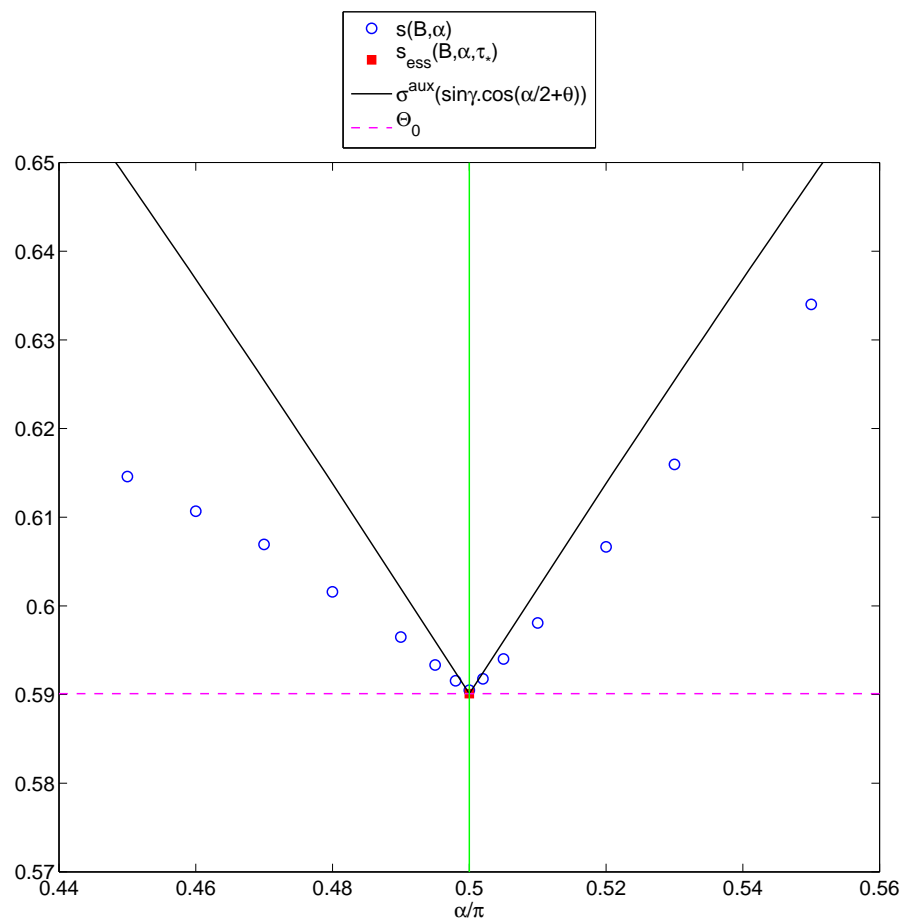


FIGURE 6.10 – Valeurs des paramètres :  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ . Zoom près du champ tangent.

### 6.4.3 Un troisième cas

Sur les figures 6.11 et 6.12, on a pris  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , soit en coordonnées cartésiennes  $\mathbf{B} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . En comparaison aux calculs de la figure 6.9, le champ magnétique ici est plus proche de l'arête et l'opérateur sur le secteur possède une partie imaginaire.

On observe que la limite des  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 0 est toujours  $b_2 \Xi_0$ . Ici on a  $b_2 = \frac{1}{2}$  et cette limite est strictement inférieure à  $\Theta_0$ , les valeurs de  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  sont donc inférieures à  $\Theta_0$  pour  $\alpha$  assez petit comme énoncé au théorème 6.33. On remarque que  $\alpha \mapsto \check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  est cette fois-ci croissante sur  $(0, \pi)$ . De plus on a encore

$$\forall \alpha \in (0, \pi), \quad \check{s}(\mathbf{B}; \alpha) < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha) .$$

On constate en particulier sur la figure 6.12 que pour un champ tangent ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), la valeur  $\check{s}(\mathbf{B}; \frac{\pi}{2})$  est légèrement inférieure à  $\Theta_0$  (contrairement au cas précédent, cf. (6.72)), et que la fonction  $\alpha \mapsto s(\mathbf{B}; \alpha)$  semble cette fois-ci régulière en  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . De plus si on note  $\check{\tau}_*$  la valeur numérique telle que  $\check{s}(\mathbf{B}; \frac{\pi}{2}) = \check{s}(\mathbf{B}; \frac{\pi}{2}, \check{\tau}_*)$ , on a trouvé  $\check{\tau}_* \approx \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}$  où  $\xi_0$  est défini dans la proposition 1.3, et donc d'après la proposition 4.15 :

$$s_{\text{ess}}(\mathbf{B}; \frac{\pi}{2}, \check{\tau}_*) \approx \Theta_0 \tag{6.73}$$

Les éléments sont de degré  $\mathbb{P}_2$ . On a choisi comme domaine de calcul le maillage en triangles  $\text{Tri}(40, 20, \alpha)$  pour  $\alpha < \frac{9\pi}{10}$  et  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  (voir la section C.1 pour le choix des maillages). Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , la valeur propre calculée  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \check{\tau}_*)$  est proche du spectre essentiel  $\Theta_0$ . Il nous a fallu agrandir le domaine en prenant  $\text{Tri}(40, 50, \frac{\pi}{2})$ . Pour  $\alpha \geq \frac{9\pi}{10}$ , les vecteurs propres calculés sont moins concentrés et il faut agrandir la taille du domaine de calcul : on a pris  $\text{Tri}(40, 40, \alpha)$  et il est alors difficile de garder un maillage suffisamment fin pour capter les oscillations des vecteurs propres. Ceci explique pourquoi la valeur  $\check{s}(\mathbf{B}; \frac{95\pi}{100})$  est trop élevée.

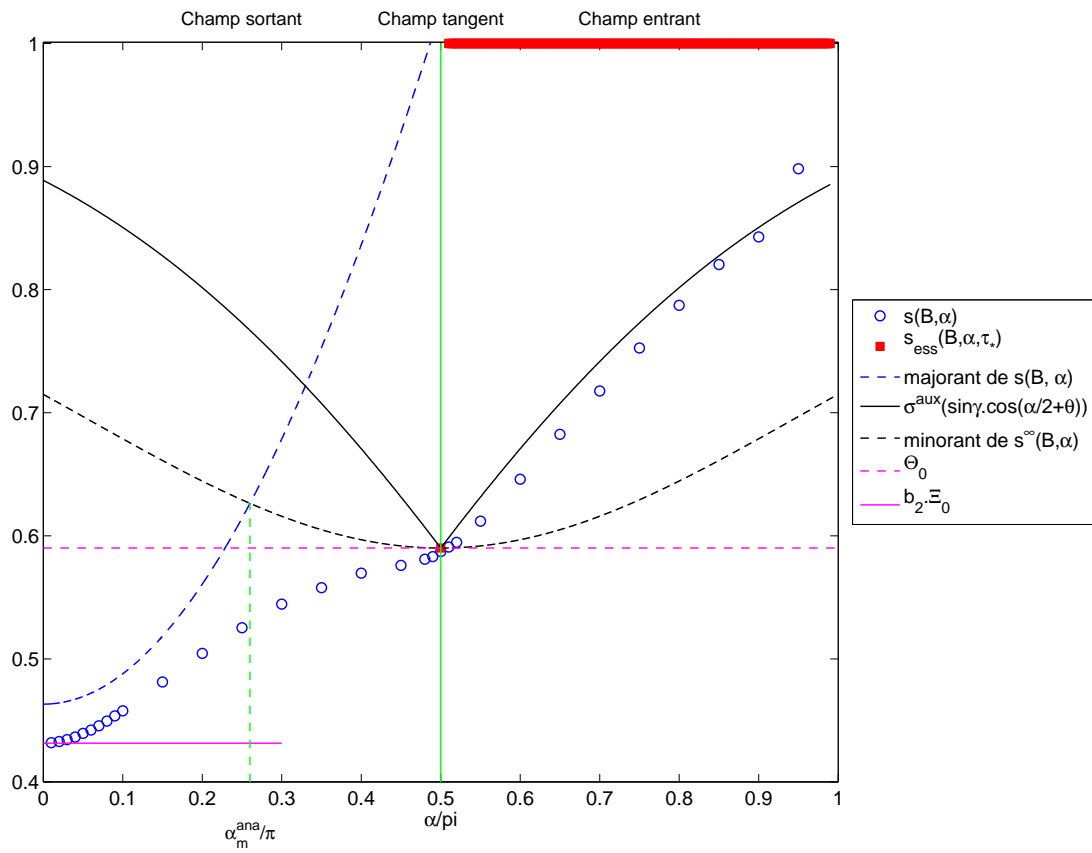


FIGURE 6.11 – Valeurs des paramètres :  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ , soit  $\mathbf{B} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha)$  selon  $\frac{\alpha}{\pi}$  comparé au majorant  $P_1(\alpha, b_2)$  défini en (6.63), à la quantité  $\sigma^{\text{aux}}(\sin \gamma \cos(\frac{\alpha}{2} + \theta))$  et à son minorant  $m^{\text{ana}}(\mathbf{B}; \alpha)$  fourni par (6.66), ainsi qu'aux constantes  $\Theta_0$  et  $\Xi_0 b_2$ .

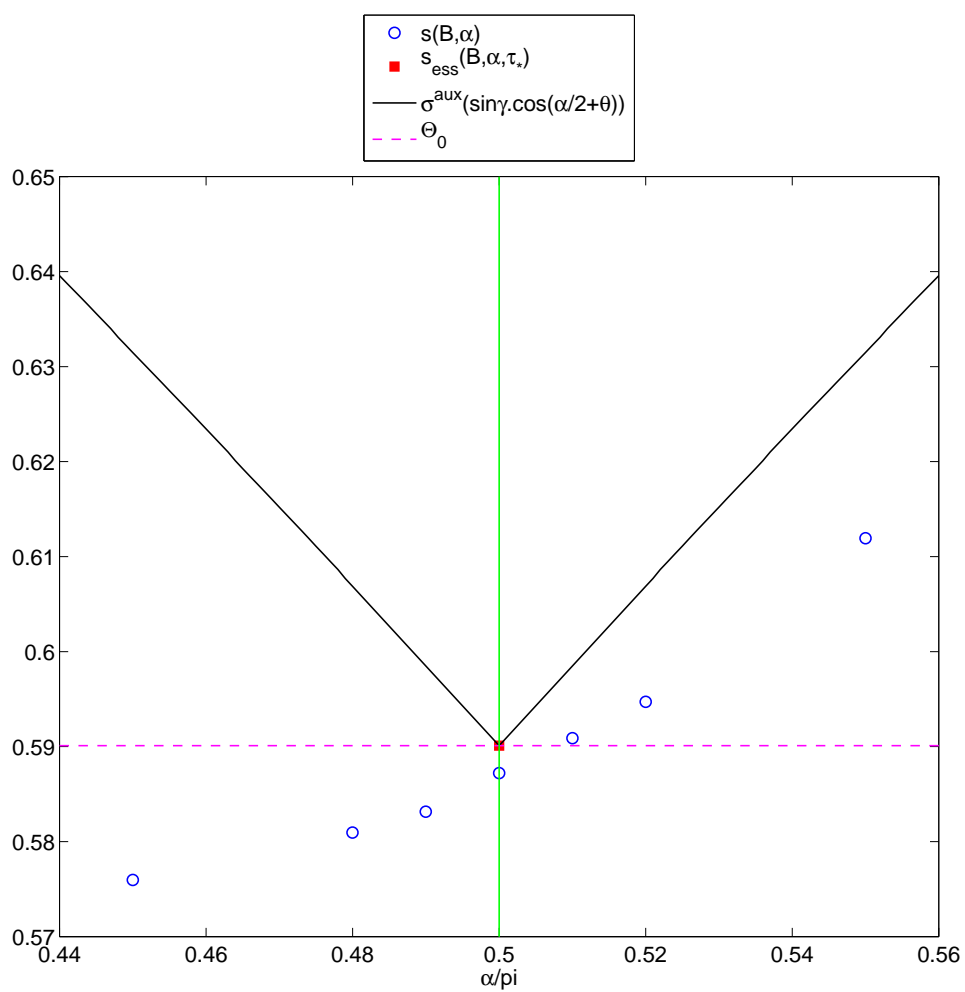


FIGURE 6.12 – Valeurs des paramètres :  $(\gamma, \theta) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ . Zoom près du champ tangent.

# Chapitre 7

## Le cas du champ bissecteur

Dans ce chapitre nous supposons que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  vérifie  $b_2 = 0$ , c'est-à-dire que le champ magnétique est contenu dans le plan bissecteur  $\mathcal{P}$  du dièdre. Nous rappelons que  $(\gamma, \theta)$  désigne les coordonnées polaires du champ magnétique  $\mathbf{B}$ . On a alors  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et

$$\mathbf{B} = (\sin \gamma, 0, \cos \gamma) .$$

Nous étudions l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . Nous montrons d'abord que pour  $\tau$  fixé non nul, le bas du spectre de cet opérateur reste minoré par une constante strictement positive quand  $\alpha$  tend vers 0. Nous nous intéressons ensuite en détail au cas  $\tau = 0$ . Afin d'abrégier les notations, nous notons dans ce chapitre

$$\kappa(\gamma, \alpha) := \underline{s}(\gamma, \frac{\pi}{2}; \alpha, 0) .$$

Nous construisons des quasi-modes en puissances de  $\alpha$  pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  quand  $\alpha$  tend vers 0. On rappelle que dans le cas  $\gamma = 0$ , on a  $\kappa(0, \alpha) = \mu(\alpha)$  où la fonction  $\alpha \mapsto \mu(\alpha)$  a été décrite dans la section 3.2. On retrouve les quasi-modes de [Bon05] et les techniques issues de [Bon05] permettent d'obtenir un développement asymptotique des paires propres en puissances de  $\alpha$  à tout ordre. Nous montrons que dans certains cas le quasi-mode à deux termes s'annule en un unique point de la bissectrice du secteur. Nous comparons les vecteurs propres calculés par éléments finis avec ces quasi-modes à deux termes et nous étudions l'influence du paramètre  $\gamma$ .

### 7.1 Le cas d'un paramètre de Fourier non nul

On a une propriété spécifique au cas  $b_2 = 0$  :

**Proposition 7.1.** *On suppose  $b_2 = 0$ . Alors la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est paire.*

*Preuve :* Nous choisissons de travailler avec la jauge  $\underline{\mathbf{A}}^{\mathbf{R}}(x_1, x_2) = (-x_2 b_3, 0)$ . On a

$$P_{\underline{\mathbf{A}}^{\mathbf{R}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau} = (D_{x_1} + b_3 x_2)^2 + D_{x_2}^2 + (x_2 - \tau)^2 .$$

On réalise le changement de variable  $X_2 = -x_2$  qui laisse le secteur invariant et on constate que  $P_{\underline{\mathbf{A}}^{\mathbf{R}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est unitairement équivalent à  $P_{-\underline{\mathbf{A}}^{\mathbf{R}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, -\tau}$ . On conclut



avec la proposition B.5. □

Puisque la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est continue, on déduit de cette proposition qu'elle admet un extremum local en  $\tau = 0$ . De nombreuses simulations numériques (voir la sous-section 7.1.2) donnent une forte présomption pour que cet extremum local soit en réalité un minimum global.

### 7.1.1 Une minoration

Comme dans [BH93], nous notons  $\lambda(a, \tau)$  le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'oscillateur harmonique  $-\partial_t^2 + t^2$  sur l'intervalle  $(-a + \tau, a + \tau)$  avec  $a > 0$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ . On étudie les limites de  $a \mapsto \lambda(a, \tau)$ . Comme pour l'opérateur de de Gennes  $\mathbf{h}_\tau^N$ , on a par comparaison avec l'oscillateur harmonique réel (voir [Bol92] et [BH93]) :

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \lambda(a, \tau) = 1. \quad (7.1)$$

Quand  $a$  est petit, on a :

**Proposition 7.2.** *Soit  $\tau \neq 0$  fixé, on a*

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a, \tau) = \tau^2. \quad (7.2)$$

*Preuve :* Supposons par exemple que  $\tau > 0$ . Alors pour  $a$  assez petit, on a

$$\forall t \in (\tau - a, \tau + a), \quad t^2 \geq (\tau - a)^2.$$

On déduit  $\liminf_{a \rightarrow 0} \lambda(a, \tau) \geq \tau^2$ . En prenant comme quasi-mode une fonction constante sur l'intervalle  $(\tau - a, \tau + a)$ , on obtient rapidement

$$\lambda(a, \tau) \leq \tau^2 + \frac{a^2}{3}.$$

□

Dans le cas  $\tau \neq 0$ , on démontre que les  $(\lambda(a, \tau))_{a \in \mathbb{R}_+}$  sont minorés par une constante strictement positive :

**Corollaire 7.3.** *Soit  $\tau \neq 0$  un réel, il existe une constante  $c(\tau) > 0$  telle que*

$$\forall a \in (0, +\infty), \quad \lambda(a, \tau) \geq c(\tau).$$

*Preuve :* La forme quadratique associée à la réalisation de Neumann de l'oscillateur harmonique sur  $(\tau - a, \tau + a)$  est

$$u \mapsto \int_{\tau-a}^{\tau+a} |u'(t)|^2 + t^2 |u|^2 dt.$$

Soit  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $a > 0$ . Si  $\lambda(\tau, a) = 0$ , alors un vecteur propre  $u_{\tau,a}$  associé est de classe  $C^\infty$  et vérifie  $u'_{\tau,a} = 0$ , elle est donc constante. Mais les fonctions constantes non nulles

ne vérifient pas l'équation aux valeurs propres  $-u''(t) + t^2 u(t) = 0$  sur l'intervalle  $(\tau - a, \tau + a)$ . Ceci est une contradiction, on a donc

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \forall a > 0, \quad \lambda(a, \tau) > 0.$$

D'après (7.1) et (7.2), la fonction  $a \mapsto \lambda(a, \tau)$  admet des limites strictement positives en  $a \rightarrow 0$  et en  $a \rightarrow +\infty$  dès que  $\tau \neq 0$ . Nous avons de plus montré que cette fonction ne s'annule pas. Puisqu'elle est continue, elle est minorée par une constante strictement positive.  $\square$

Dans le cas  $\tau = 0$ , l'asymptotique suivante est connue (voir par exemple [DH93b]) :

$$\lambda(a, 0) = \frac{a^2}{3} + O(a^6). \quad (7.3)$$

En utilisant la réalisation de Neumann sur des intervalles bornés de l'oscillateur harmonique, nous montrons

**Proposition 7.4.** *Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant unitaire avec  $b_2 = 0$ . On a*

$$\forall \tau \neq 0, \exists C > 0, \forall \alpha \in (0, \pi), \quad \underline{s}(\gamma, \frac{\pi}{2}; \alpha, \tau) \geq C. \quad (7.4)$$

*Preuve :* Le cas  $b_1 = 0$  correspond au champ  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$  tangent à l'arête. La proposition est alors claire puisque  $\underline{s}(0, \frac{\pi}{2}; \alpha, \tau) = \mu(\alpha) + \tau^2$ . Dans le cas  $b_1 \neq 0$ , nous travaillons avec la jauge  $\underline{\mathbf{A}}^R(x_1, x_2) = (-x_2 b_3, 0)$ . La forme quadratique associée à l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^R, S_\alpha} + V_{\mathbf{B}, \tau}$  est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathbf{A}^S, \tau}(u) &= \int_{S_\alpha} |(D_{x_1} + x_2 b_3)u|^2 + |D_{x_2} u|^2 + (x_2 b_1 - \tau)^2 |u|^2 dx_1 dx_2 \\ &\geq \int_{S_\alpha} |D_{x_2} u|^2 + (x_2 b_1 - \tau)^2 |u|^2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

En utilisant un changement d'échelle puis en intégrant d'abord par rapport à la variable  $x_2$ , on utilise la réalisation de Neumann de l'oscillateur harmonique sur des intervalles :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathbf{A}^S, \tau}(u) &\geq b_1 \int_{S_\alpha} |D_{x_2} u|^2 + (x_2 - \tau b_1^{-1/2})^2 |u|^2 dx_1 dx_2 \\ &\geq \int_{x_1 > 0} \left( \int_{|x_2| < \tan \frac{\alpha}{2} x_1} |D_{x_2} u|^2 + (x_2 - \tau b_1^{-1/2})^2 |u|^2 dx_2 \right) dx_1 \\ &\geq \int_{x_1 > 0} \lambda \left( \tan \frac{\alpha}{2}, \tau b_1^{-1/2} \right) \left( \int_{|x_2| < \tan \frac{\alpha}{2} x_1} |u|^2 dx_2 \right) dx_1 \\ &\geq c(\tau b_1^{-1/2}) \|u\|_{L^2(S_\alpha)}^2. \end{aligned}$$

où la constante  $c(\tau b_1^{-1/2})$  est issue du corollaire 7.3.  $\square$

Ainsi pour  $\tau$  fixé non nul, on déduit du principe du min-max que la limite inférieure quand  $\alpha$  tend vers 0 de  $\underline{s}(\gamma, \frac{\pi}{2}; \alpha, \tau)$  est strictement positive. Nous verrons que ce n'est pas le cas si  $\tau = 0$ .

### 7.1.2 Illustration numérique

Dans le cas particulier  $b_2 = 0$ , on a  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et les limites de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  sont les mêmes quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$  et  $-\infty$ , on a en particulier :

$$s^\infty(\gamma, \frac{\pi}{2}; \alpha) = \sigma^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \frac{\alpha}{2}) .$$

Sur la figure 7.1 nous traçons les valeurs calculées  $\check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  associées à l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}, s_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  pour un champ bissecteur ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) et un angle d'ouverture  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Nous avons fait les calculs pour  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  (cas d'un champ perpendiculaire à l'arête) et  $\gamma = \frac{\pi}{10}$  (cas d'un champ proche de l'arête). On constate que les valeurs propres calculées sont minimales pour  $\tau = 0$ . On a aussi représenté les valeurs limites  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  prévues par le théorème 5.7. On constate que les valeurs  $\check{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  se rapprochent de  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  par valeurs inférieures pour  $|\tau|$  grand. Nous avons aussi tracé  $\mu(\frac{\pi}{2})$  en prenant comme valeur celle calculée dans [BNDMV07]. On note  $I := [-1.5 : 0.1 : 1.5]$  l'ensemble des valeurs de  $\tau$  pour lesquelles on a effectué le calcul et  $\check{s}(\gamma, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \tau)$  les valeurs propres calculées numériquement. On constate que

$$\forall \tau \in I, \quad \mu(\frac{\pi}{2}) < \check{s}(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \tau) < \check{s}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \tau) .$$

Sur la figure 7.2 nous avons représenté les mêmes quantités pour un angle d'ouverture  $\alpha = \frac{4\pi}{5}$ . Encore une fois les diverses quantités calculées sont supérieures à la valeur de  $\mu(\frac{4\pi}{5})$  calculée dans [BNDMV07].

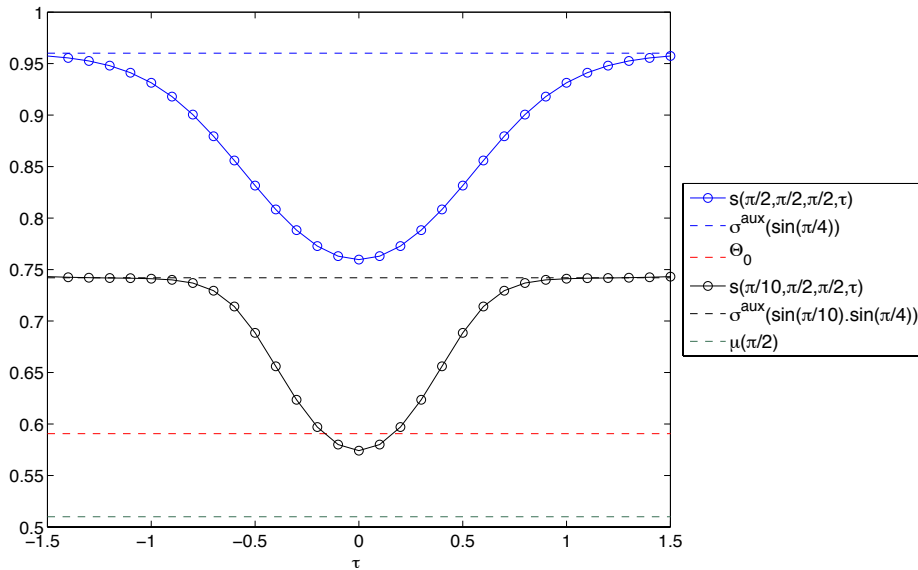


FIGURE 7.1 – Valeurs des paramètres :  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .  $\check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\gamma \in \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\}$  et  $\tau = \frac{k}{10}$ ,  $-15 \leq k \leq 15$  comparé à  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \frac{\alpha}{2})$ ,  $\Theta_0$  et  $\mu(\alpha)$ . Domaine de calcul :  $\text{Tri}(20, 15, \frac{\pi}{10})$ . Degré :  $\mathbb{P}_4$ .

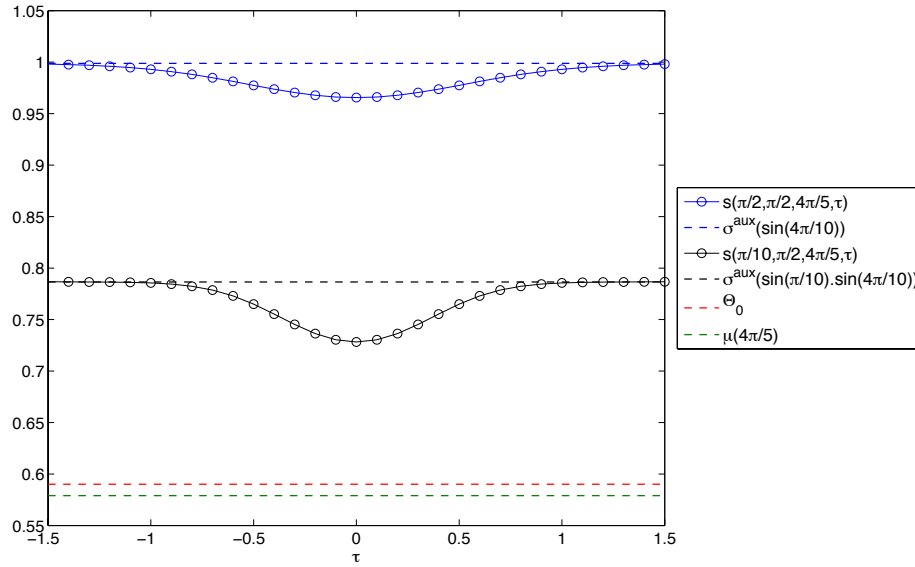


FIGURE 7.2 – Valeurs des paramètres :  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \frac{4\pi}{5}$ .  $\check{s}(\gamma, \theta; \alpha, \tau)$  selon  $\tau$  pour  $\gamma \in \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\}$  et  $\tau = \frac{k}{10}$ ,  $-15 \leq k \leq 15$  comparé à  $\sigma_1^{\text{aux}}(\sin \gamma \sin \frac{\alpha}{2})$ ,  $\Theta_0$  et  $\mu(\alpha)$ . Domaine de calcul :  $\text{Tri}(20, 10, \frac{4\pi}{5})$ . Degré :  $\mathbb{P}_4$ .

Ces calculs numériques ainsi que les résultats de la sous-section 7.1.1 laissent penser que  $\tau = 0$  est un minimum global pour la fonction  $\tau \mapsto \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  lorsque le champ  $\mathbf{B}$  est contenu dans le plan bissecteur du dièdre. Nous sommes donc amenés à formuler la conjecture suivante :

**Conjecture 7.5.** *Soit  $\mathbf{B}$  de coordonnées sphériques  $(\gamma, 0)$  un champ magnétique contenu dans le champ bissecteur du dièdre avec  $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$ . Alors pour tout  $\alpha \in (0, \pi)$ , le réel  $\tau = 0$  est un minimum global de  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  et on a*

$$\forall \alpha \in (0, \pi), \quad \lambda(\mathbf{B}; \mathcal{D}_\alpha) = s(\mathbf{B}; \alpha) = \kappa(\gamma, \alpha) \quad (7.5)$$

où on a noté  $\kappa(\gamma, \alpha) := \underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, 0)$ .

## 7.2 Changements de coordonnées et premier quasi-mode

On étudie dans la suite de ce chapitre un cas particulier motivé par la conjecture 7.5 :

**Dans toute la suite de ce chapitre, on suppose  $\tau = 0$**

Dans ce cas particulier l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^s, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, 0}$  s'écrit

$$\left(D_{x_1} - \frac{x_2}{2}b_3\right)^2 + \left(D_{x_2} + \frac{x_1}{2}b_3\right)^2 + b_1^2 x_2^2. \quad (7.6)$$

et la droite  $\Upsilon$  d'annulation du potentiel est la bissectrice du secteur. Nous rappelons que  $\Omega_0$  est la demi-bande infinie  $(0, +\infty) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Au chapitre 6 nous avons réalisé dans la

forme quadratique associée à l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^s, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  les transformations successives suivantes :

- Le changement de variables associé aux coordonnées polaires  $(r, \phi)$ ,
- Le changement de jauge associé à la fonction  $\varphi(r, \phi) := \frac{r^2}{2}\phi$ ,

et nous avons abouti à la forme  $\mathcal{Q}_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}^{\text{pol}}$  écrite en (6.1). Pour le cas  $\tau = 0$ , nous réalisons maintenant le changement d'échelle  $(t, \eta) = (\alpha \frac{r^2}{2}, \frac{\phi}{\alpha})$ . On obtient (cf [Bon05]) que la forme quadratique associée à  $P_{\underline{\mathbf{A}}^s, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, 0}$  est unitairement équivalente à la forme

$$\alpha \left( \int_{\Omega_0} 2t |(\partial_t - i\eta b_3)u|^2 + \frac{1}{2\alpha^2 t} |\partial_\eta u|^2 + 2 \frac{\sin^2 \alpha \eta}{\alpha^2} t b_1^2 |u|^2 dt d\eta \right) := \mathcal{Q}_\alpha(u) \quad (7.7)$$

sur le domaine de forme

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\mathcal{Q}_\alpha) = \\ \left\{ u \in L^2(\Omega_0), \sqrt{t}(\partial_t - i\eta b_3)u \in L^2(\Omega_0), \frac{1}{\sqrt{t}}\partial_\eta u \in L^2(\Omega_0), \sin(\alpha\eta)\sqrt{t}u \in L^2(\Omega_0) \right\}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

En construisant un quasi-mode comme dans [Bon03b] on obtient

**Proposition 7.6.**

$$\kappa(\gamma, \alpha) \leq \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \sin^2 \gamma}{120} \alpha^3. \quad (7.9)$$

*Preuve :* On utilise le quasi-mode  $u_0(t, \eta) = 3^{-1/4} e^{-\frac{t}{2\sqrt{3}}}$  issu de [Bon03b]. On calcule d'abord

$$\int_{-1/2}^{1/2} \eta^2 d\eta = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2(\alpha\eta) d\eta = \frac{1 - \text{sinc } \alpha}{2}.$$

On obtient

$$\mathcal{Q}_\alpha(u_0) = \alpha \int_{\mathbb{R}_+} 2t |u'_0|^2 + \left( \frac{1}{6} b_3^2 + \frac{1 - \text{sinc } \alpha}{\alpha^2} b_1^2 \right) t |u_0|^2 dt.$$

En utilisant une inégalité de Taylor, on déduit

$$\mathcal{Q}_\alpha(u_0) \leq \alpha \int_{\mathbb{R}_+} 2t |u'_0|^2 + \left( \frac{b_3^2 + b_1^2}{6} + \frac{\alpha^2}{120} b_1^2 \right) t |u_0|^2 dt.$$

Or on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} 2t |u'_0|^2 + \frac{t}{6} |u_0|^2 dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+} t |u_0(t)|^2 dt = \sqrt{3}$$

d'où le résultat. □

On déduit une comparaison entre  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  et la quantité spectrale modèle  $\Theta_0$  :

**Corollaire 7.7.** *Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique tangent unitaire tel que  $b_2 = 0$ . Si le couple  $(\mathbf{B}, \alpha)$  vérifie  $\frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} b_1^2}{120} \alpha^3 < \Theta_0$ , alors on a*

$$s(\mathbf{B}; \alpha) < \Theta_0.$$

On obtient aussi une comparaison entre  $s(\mathbf{B}; \alpha)$  et  $s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$  :

**Corollaire 7.8.** *Soit  $\mathbf{B}$  un champ magnétique tangent unitaire tel que  $b_2 = 0$ . Si le couple  $(\mathbf{B}, \alpha)$  vérifie  $\frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}b_1^2}{120}\alpha^3 < s^\infty(\mathbf{B}; \alpha)$ , alors la borne inférieure sur  $\tau$  des  $\underline{s}(\mathbf{B}; \alpha, \tau)$  est atteinte.*

On note que la condition de ce corollaire est satisfaite dès que  $\frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\sin^2\gamma}{120}\alpha^3 \leq \Theta_0$ .

**Remarque 7.9.** On a numériquement :

$$\forall \alpha \in (0, 0.9972), \quad \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\sin^2\gamma}{120}\alpha^3 < \Theta_0.$$

## 7.3 Calcul de l'asymptotique

Nous reprenons les éléments de [Bon05] pour calculer un développement asymptotique de  $\kappa(\gamma, \alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers 0. Dans un premier temps nous développons l'opérateur associé à la forme quadratique (7.7) en puissances de  $\alpha$ . Comme dans la section 2.4, nous cherchons les paires propres sous la forme de séries formelles. Nous construisons ainsi un quasi-mode à tout ordre en puissances de  $\alpha$  et obtenons une majoration de  $\kappa(\gamma, \alpha)$ . Un des opérateurs modèles rencontrés est l'opérateur de Laguerre  $\mathbf{l}$  (voir (6.12)). Les techniques semi-classiques de [Bon05] permettent de donner une minoration de la valeur propre  $\kappa(\gamma, \alpha)$  et fournissent une asymptotique en puissances de  $\alpha$ .

### 7.3.1 Développement en série formelle

La forme sesquilinéaire associée à la forme quadratique  $\mathcal{Q}_\alpha$  est

$$\ell^\alpha(u, v) = \alpha \int_{\Omega_0} 2t(D_t - b_3\eta)u \overline{(D_t - b_3\eta)v} + \frac{1}{2\alpha^2 t} D_\eta u \overline{D_\eta v} + 2tb_1^2 \frac{\sin^2(\alpha\eta)}{\alpha^2} u \overline{v} dt d\eta$$

et l'opérateur associé est

$$L^\alpha := \alpha \left( 2t(D_t - b_3\eta)^2 + \frac{1}{2\alpha^2 t} D_\eta^2 + 2tb_1^2 \frac{\sin^2(\alpha\eta)}{\alpha^2} \right)$$

sur le domaine

$$\begin{aligned} \text{Dom}(L^\alpha) := \{ u \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_\alpha), t(D_t - b_3\eta)^2 u \in L^2(\Omega_0), \frac{1}{\sqrt{t}} \partial_\eta^2 u \in L^2(\Omega_0), \\ (\partial_\eta u)_{\eta=\pm\frac{1}{2}} = 0, (t(D_t - b_3\eta)u)_{t=0} = 0 \}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

On utilise le développement

$$\frac{\sin^2(\alpha\eta)}{\alpha^2} = \frac{1 - \cos(2\alpha\eta)}{2\alpha^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2\alpha\eta)^{2k}}{2 \cdot (2k)! \alpha^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(2\eta)^{2k+2}}{2 \cdot (2k+2)!} \alpha^{2k}.$$

On développe ensuite la forme  $\ell^\alpha$  en puissances de  $\alpha$  : on a au sens des séries formelles

$$\ell^\alpha(u, v) = \alpha \sum_{k=-1}^{+\infty} \ell_k(u, v) \alpha^{2k}$$

avec

$$\begin{cases} \ell_{-1}(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \frac{1}{t} \partial_\eta u \overline{\partial_\eta v} dt d\eta \\ \ell_0(u, v) = \int_{\Omega_0} 2t(D_t - b_3\eta)u \overline{(D_t - b_3\eta)v} + 2t\eta^2 b_1^2 u \bar{v} dt d\eta \\ \ell_k(u, v) = \frac{(-1)^k 2^{2k+2}}{(2k+2)!} \int_{\Omega_0} t\eta^{2k+2} u \bar{v} dt d\eta, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Les extensions de Friedrichs de ces formes sesquilineaires à partir de  $\text{Dom}(\mathcal{Q}_\alpha)$  sont notées  $L_k$  avec :

$$\begin{cases} L_{-1} := \frac{1}{2t} D_\eta^2, \\ L_0 := 2(D_t - b_3\eta)t(D_t - b_3\eta) + 2t\eta^2 b_1^2, \\ L_k := (-1)^k b_1^2 \frac{2^{2k+2}}{(2k+2)!} t\eta^{2k+2}, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

On a en particulier

$$\ell_1(u, v) = -\frac{2b_1^2}{3} \int_{\Omega_0} t\eta^4 u \bar{v} dt d\eta \quad \text{et} \quad L_1 = -\frac{2b_1^2}{3} t\eta^4. \quad (7.11)$$

On résout le problème aux valeurs propres en cherchant une paire propre  $\kappa^\gamma[\alpha], u^\gamma[\alpha]$  sous la forme de séries en puissances de  $\alpha$ , plus précisément nous construisons une solution formelle en puissances de  $\alpha$  :

$$\kappa^\gamma[\alpha] = \alpha \sum_{k=-1}^{+\infty} \kappa_k^\gamma \alpha^{2k} \quad \text{et} \quad u^\gamma[\alpha] = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^\gamma \alpha^{2k}$$

où  $u^\gamma[\alpha]$  vérifie la condition de Neumann en  $\eta = -\frac{1}{2}$  et  $\eta = \frac{1}{2}$ . On cherche donc à résoudre (au sens des séries formelles) :

$$\begin{cases} \ell^\alpha(u^\gamma[\alpha], v) = \kappa^\gamma[\alpha] \langle u^\gamma[\alpha], v \rangle_{L^2(\Omega_0)} \quad \forall v \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_\alpha), \\ (\partial_\eta u^\gamma[\alpha])_{\eta=\frac{1}{2}} = (\partial_\eta u^\gamma[\alpha])_{\eta=-\frac{1}{2}} = 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

En posant  $u_{-1}^\gamma = 0$ , ceci nous amène à déterminer par récurrence les suites  $(\kappa_k^\gamma)_{k \geq -1}$  et  $(u_k^\gamma)_{k \geq -1}$ . On cherche ces suites de manière à avoir pour tout  $v$  dans  $\text{Dom}(\mathcal{Q}_\alpha)$  :

$$\begin{cases} \ell_{-1}(u_0^\gamma, v) - \kappa_{-1}^\gamma \langle u_0^\gamma, v \rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0, \\ \ell_{-1}(u_{k-1}^\gamma, v) - \kappa_{-1}^\gamma \langle u_{k-1}^\gamma, v \rangle_{L^2(\Omega_0)} = \sum_{p=1}^{k-1} \kappa_{p-1}^\gamma \langle u_{k-p-1}^\gamma, v \rangle - \sum_{p=1}^{k-1} \ell_{p-1}(u_{k-p-1}, v), \quad k \geq 1, \\ \partial_\eta u_{k-1}(t, -\frac{1}{2}) = \partial_\eta u_{k-1}(t, \frac{1}{2}) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \quad (7.13)$$

### 7.3.2 Construction de quasi-mode

#### Premier terme

On a  $\mathfrak{S}(L_{-1}) = [0, +\infty)$  et les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont les fonctions indépendantes de  $\eta$ . Nous notons  $\Pi$  le projecteur orthogonal sur  $\ker L_{-1}$ . On a une forme explicite pour ce projecteur :

$$\Pi : u \mapsto \int_{-1/2}^{1/2} u(t, \eta) d\eta .$$

La première équation impose  $L_{-1}u_0^\gamma = \kappa_{-1}^\gamma u_0^\gamma$ . Puisque nous cherchons la plus petite valeur propre nous prenons

$$\kappa_{-1}^\gamma = 0 \quad \text{et} \quad u_0^\gamma \in \ker L_{-1} , \quad (7.14)$$

c'est-à-dire une fonction  $u_0^\gamma$  qui ne dépend que de la variable  $t$ .

#### Deuxième terme et rappels sur l'opérateur moyenné

La deuxième équation s'écrit

$$L_{-1}u_1 = \kappa_0^\gamma u_0^\gamma - L_0 u_0^\gamma , \quad (7.15)$$

ou encore sous forme variationnelle :

$$\forall v \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_\alpha), \quad \ell_{-1}(u_1^\gamma, v) = \kappa_0^\gamma \langle u_0^\gamma, v \rangle - \ell_0(u_0^\gamma, v) .$$

On restreint cette égalité aux fonctions  $v \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+})$  (qui sont bien dans  $\ker L_{-1}$ ). Pour cela on calcule pour  $v \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+})$  :

$$\begin{aligned} \ell_0(u_0^\gamma, v) &= \int_{\mathbb{R}_+} 2D_t u_0^\gamma \overline{D_t v} dt - b_3 \left( \int_{\mathbb{R}_+} 2t (D_t u_0^\gamma \bar{v} + u_0^\gamma \overline{D_t v}) dt \right) \left( \int_{-1/2}^{1/2} \eta d\eta \right) \\ &\quad + (b_1^2 + b_3^2) \left( \int_{\mathbb{R}_+} 2t u_0^\gamma \bar{v} dt \right) \left( \int_{-1/2}^{1/2} \eta^2 d\eta \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} 2t D_t u_0^\gamma \overline{D_t v} + \frac{t}{6} u_0^\gamma \bar{v} dt , \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que le champ  $\mathbf{B} = (b_1, 0, b_3)$  est unitaire. On obtient donc :

$$\forall v \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_+}), \quad \int_{\mathbb{R}_+} 2t D_t u_0^\gamma \overline{D_t v} + \frac{t}{6} u_0^\gamma \bar{v} dt = \kappa_0^\gamma \langle u_0^\gamma, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} . \quad (7.16)$$

Comme dans [Bon03b], nous introduisons l'extension de Friedrichs associée à ce problème variationnel :

$$\mathfrak{l}^{\text{moy}} = 2D_t t D_t + \frac{t}{6} \quad (7.17)$$



définie dans sur le domaine (voir [BC72])

$$\mathcal{W}_1^2(\mathbb{R}_+) := \{u \in H^1(\mathbb{R}_+), tu \in H^2(\mathbb{R}_+)\} . \quad (7.18)$$

On sait (voir [Bon05]) que cet opérateur est à résolvante compacte et son spectre est constitué de valeurs propres simples. En effet l'opérateur  $\mathfrak{l}^{\text{moy}}$  est unitairement équivalent à  $\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathfrak{l}$  où  $\mathfrak{l}$  est l'opérateur de Laguerre défini en (6.12). On déduit :

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{l}^{\text{moy}}) = \left\{ \frac{2k-1}{\sqrt{3}}, k \geq 1 \right\} . \quad (7.19)$$

Nous notons  $\kappa^{\text{moy}} := \frac{1}{\sqrt{3}}$  la plus petite valeur propre et

$$u^{\text{moy}} : t \mapsto 3^{-1/4} e^{-\frac{t}{2\sqrt{3}}}$$

un vecteur propre normalisé associé. On constate que l'opérateur  $\mathfrak{l}^{\text{moy}}$  est identique à l'opérateur  $\Pi L_0$  restreint au domaine  $\ker L_{-1}$ . En projetant (7.15) sur  $\ker L_{-1}$ , on est amené à résoudre

$$\mathfrak{l}^{\text{moy}} u_0^\gamma = \kappa_0^\gamma u_0^\gamma . \quad (7.20)$$

Notons que nous avons présenté le problème variationnel pour mieux décrire l'opérateur  $\Pi L_0$  restreint à  $\ker L_{-1}$ , et que l'équation aux valeurs propres (7.20) est bien équivalente au problème variationnel (7.16). Ainsi en utilisant (7.19) nous prenons

$$\kappa_0^\gamma = \kappa^{\text{moy}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad u_0^\gamma = u^{\text{moy}} . \quad (7.21)$$

Il est remarquable que  $(\kappa_0^\gamma, u_0^\gamma)$  ne dépend pas de  $\gamma$ .

### Résolution au rang $k$

ENONCÉ DES HYPOTHÈSES DE RÉCURRENCE. Supposons donc la suite  $(\kappa_k^\gamma, u_k^\gamma)_k$  construite jusqu'au rang  $n-1$  ( $n \geq 1$ ). Par hypothèse de récurrence, on suppose pour  $0 \leq k \leq n-1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{-1} u_k^\gamma = \sum_{p=1}^k (\kappa_{p-1}^\gamma - L_{p-1}) u_{k-p}^\gamma , \end{array} \right. \quad (7.22a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0, \quad \partial_\eta u_k^\gamma(t, -\frac{1}{2}) = \partial_\eta u_k^\gamma(t, \frac{1}{2}) = 0 , \end{array} \right. \quad (7.22b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^{k+1} (\kappa_{p-1}^\gamma - L_{p-1}) u_{k+1-p}^\gamma \in (\ker L_{-1})^\perp . \end{array} \right. \quad (7.22c)$$

Nous supposons de plus que l'on peut écrire de manière unique

$$u_k^\gamma = v_k^\gamma + v_k^{\gamma, \perp}, \quad v_k^\gamma \in (\ker L_{-1}) \cap \{u^{\text{moy}}\}^\perp, \quad v_k^{\gamma, \perp} \in (\ker L_{-1})^\perp \quad (7.23)$$

avec la convention  $v_0^{\gamma, \perp} = 0$ . Nous supposons que pour  $k \geq 0$ ,  $v_k^\gamma$  et  $v_k^{\gamma, \perp}$  sont de la forme  $P_k^\gamma u^{\text{moy}}$  et  $Q_k^\gamma u^{\text{moy}}$  où  $P_k^\gamma$  est un polynôme réel en  $t$  de degré  $3k$  et  $Q_k^\gamma$  est un polynôme

complexe en  $(t, \eta)$  de degré  $3k - 1$  en  $t$  et de degré  $4k$  en  $\eta$  (avec la convention qu'un polynôme de degré  $-1$  est nul). De plus tous les termes de  $Q_k^\gamma$  de degré pair (respectivement impair) en  $\eta$  ont un coefficient réel (respectivement imaginaire pur).

DESCRIPTION DES HYPOTHÈSES DE RÉCURRENCE. Nous décrivons ici ces hypothèses de récurrence. L'équation (7.22b) assure  $u_k^\gamma \in \text{Dom}(L_{-1})$ . La condition (7.22c) au rang  $k$  est une condition (dite de compatibilité) nécessaire pour résoudre l'équation (7.22a) au rang  $k + 1$ . Dans la décomposition (7.23),  $v_k^\gamma$  est une fonction ne dépendant pas de  $\eta$  et  $v_k^{\gamma, \perp}$  est une fonction vérifiant

$$\int_{-1/2}^{1/2} v_n^{\gamma, \perp}(t, \eta) d\eta = 0 .$$

Nous verrons dans la construction que ces deux fonctions ont bien la structure "polynôme-exponentielle" annoncée.

HÉRÉDITÉ DES HYPOTHÈSES. Les hypothèses de récurrence sont satisfaites au rang 0 grâce aux choix de  $u_0^\gamma$  et  $\kappa_0^\gamma$  faits en (7.21). Nous construisons maintenant  $(\kappa_n^\gamma, u_n^\gamma)$ . Nous utilisons la décomposition  $u_n^\gamma = v_n^\gamma + v_n^{\gamma, \perp}$ . Nous sommes amenés à résoudre

$$\begin{cases} L_{-1}v_n^{\gamma, \perp} = \sum_{p=1}^n (\kappa_{p-1}^\gamma - L_{p-1})u_{n-p}^\gamma , & (7.24a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall t > 0, \quad \partial_\eta v_n^{\gamma, \perp}(t, -\frac{1}{2}) = \partial_\eta v_n^{\gamma, \perp}(t, \frac{1}{2}) = 0 , & (7.24b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Pi v_n^{\gamma, \perp} = 0 . & (7.24c) \end{cases}$$

La relation (7.22c) au rang  $n - 1$  nous permet de dire que le second membre de (7.24a) est dans  $(\ker L_{-1})^\perp$ . Le lemme 4.6 de [Bon05] permet de déterminer  $v_n^{\gamma, \perp}$  de manière unique. Sous les hypothèses de récurrence, le membre de droite de (7.24a) est de la forme  $\tilde{Q}u^{\text{moy}}$  où  $\tilde{Q}$  est un polynôme de degré  $(4n - 4) + 2$  en  $\eta$  et  $(3n - 3) + 1$  en  $t$ . De plus en utilisant la forme des  $L_k$  pour  $k \geq 0$ , on constate que les termes de degré pair en  $\eta$  sont encore réels et ceux impairs en  $\eta$  sont imaginaires purs. On déduit de [Bon05, lemme 4.7] que  $v_n^{\gamma, \perp}$  est de la forme  $Q_n^\gamma u^{\text{moy}}$  où  $Q_n^\gamma$  est un polynôme de degré  $4n$  en  $\eta$  et  $3n - 1$  en  $t$ . De plus les termes en  $\eta$  ont encore les structures relatives à leur parité énoncées plus haut.

Nous exploitons maintenant l'équation (7.22c) au rang  $n$ . Puisque  $u^{\text{moy}} \in \ker L_{-1}$ , on a

$$\left\langle \sum_{p=1}^{n+1} (\kappa_{p-1}^\gamma - L_{p-1})u_{n+1-p}^\gamma, u^{\text{moy}} \right\rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0 ,$$

et puisque chaque  $u_k$  (avec  $k \leq n - 1$ ) est dans le domaine de tous les  $L_p$  ( $p \geq -1$ ) :

$$\left\langle \sum_{p=1}^{n+1} u_{n+1-p}^\gamma, (\kappa_{p-1}^\gamma - L_{p-1})u^{\text{moy}} \right\rangle_{L^2(\Omega_0)} = 0 .$$

On déduit

$$\kappa_n^\gamma \|u^{\text{moy}}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}^2 = \sum_{p=2}^{n+1} \langle u_{n+1-p}^\gamma, (\kappa_{p-1}^\gamma - L_{p-1})u^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega_0)} + \langle (L_0 - \kappa^{\text{moy}})u_n^\gamma, u^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega_0)} . \quad (7.25)$$

A ce stade  $u_n^\gamma$  n'est pas encore construit mais nous pouvons tout de même déduire  $\kappa_n^\gamma$ . En effet, puisque  $v_n^\gamma$  ne dépend pas de  $\eta$ , on a

$$\begin{aligned} \langle (L_0 - \gamma_0^\gamma) v_n^\gamma, u^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega_0)} &= \int_{\mathbb{R}_+} (\mathfrak{l}^{\text{moy}} - \kappa^{\text{moy}}) v_n^\gamma u^{\text{moy}} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} v_n^\gamma (\mathfrak{l}^{\text{moy}} - \kappa^{\text{moy}}) u^{\text{moy}} dt \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\langle (L_0 - \kappa^{\text{moy}}) u_n^\gamma, u^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega_0)} = \langle (L_0 - \kappa^{\text{moy}}) v_n^{\gamma, \perp}, u^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega_0)}$$

et puisque  $u^{\text{moy}}$  est normé,  $\kappa_n^\gamma$  est déterminé de manière unique :

$$\kappa_n^\gamma = \sum_{p=2}^{n+1} \langle u_{n+1-p}^\gamma, (\kappa_{p-1}^\gamma - L_{p-1}) u^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega_0)} + \langle (L_0 - \kappa^{\text{moy}}) v_n^{\gamma, \perp}, u^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega_0)} . \quad (7.26)$$

Il nous reste à déterminer  $v_n^\gamma$ . La condition (7.22c) fournit

$$\forall v \in \ker L_{-1}, \quad \langle (L_0 - \kappa^{\text{moy}}) u_n^\gamma, v \rangle_{L^2(\Omega_0)} = \sum_{p=2}^{n+1} \langle (\kappa_{p-1}^\gamma - L_{p-1}) u_{n+1-p}^\gamma, v \rangle_{L^2(\Omega_0)} .$$

On en déduit

$$\forall t > 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} (L_0 - \kappa^{\text{moy}}) v_n^\gamma(t) d\eta = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{p=2}^{n+1} (\kappa_{p-1}^\gamma - L_{p-1}) u_{n+1-p}^\gamma - (L_0 - \kappa_n^\gamma) v_n^{\gamma, \perp} d\eta .$$

Nous notons  $R_n$  le membre de droite (qui est une fonction de la variable  $t$ ). Puisque nous cherchons  $v_n^\gamma \in \{u^{\text{moy}}\}^\perp$ , nous sommes ainsi amenés à résoudre

$$\begin{cases} \mathfrak{l}^{\text{moy}} v_n^\gamma - \kappa^{\text{moy}} v_n^\gamma = R_n , \\ \langle v_n^\gamma, u^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 0 . \end{cases} \quad (7.27a)$$

$$(7.27b)$$

La seconde équation demande à  $u_n^\gamma$  d'être dans  $\ker(\mathfrak{l}^{\text{moy}} - \kappa^{\text{moy}})^\perp$ . De plus par construction de  $\kappa_n^\gamma$ , le second membre de (7.27a) est aussi dans  $\ker(\mathfrak{l}^{\text{moy}} - \kappa^{\text{moy}})^\perp$ . D'après l'alternative de Fredholm,  $\mathfrak{l}^{\text{moy}} - \kappa^{\text{moy}}$  est inversible sur l'orthogonal de son noyau, ceci définit ainsi  $v_n^\gamma$  de manière unique dans  $\ker(\mathfrak{l}^{\text{moy}} - \kappa^{\text{moy}})^\perp$  (voir [Bon05, lemme 4.4]). D'après la forme de  $v_n^{\gamma, \perp}$  et les hypothèses de récurrence,  $R_n$  est de la forme  $\tilde{P} u^{\text{moy}}$  où  $\tilde{P}$  est un polynôme réel en  $t$  de degré  $3n$ . On déduit de [Bon05, lemme 4.5] que  $v_n^\gamma$  est de la forme  $P_n u^{\text{moy}}$  où  $P_n$  est un polynôme réel de degré  $3n$ . Nous avons bien construit le couple  $(\kappa_n^\gamma, u_n^\gamma)$  et nous pouvons conclure la récurrence.

Nous avons donc construit par récurrence une solution au problème formel (7.12). Comme au chapitre 2 nous notons  $(\kappa^{\gamma, J}(\alpha), u_\alpha^{\gamma, J})$  le couple obtenu en tronquant les séries formelles  $\kappa^\gamma[\alpha]$  et  $u^\gamma[\alpha]$  au rang  $J$ . Par construction on a montré pour tout  $J \geq 1$  et  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$  l'existence d'un réel  $\alpha_0 > 0$  et d'une constante  $C_{J, \gamma}$  tels que pour  $\alpha \in (0, \alpha_0)$  on a :

$$\|L^\alpha u_\alpha^{\gamma, J} - \kappa^{\gamma, J}(\alpha) u_\alpha^{\gamma, J}\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C_{J, \gamma} \alpha^{2J+3} . \quad (7.28)$$

On déduit du théorème spectral

$$\text{dist}(\kappa^{\gamma, J}(\alpha), \mathfrak{S}(L^\alpha)) \leq C_{\gamma, J} \alpha^{2J+3} . \quad (7.29)$$

### 7.3.3 Conclusion et illustration numérique

Nous avons montré qu'il existe pour tout  $J \geq 0$  une valeur propre de  $L^\alpha$  dans un voisinage de  $\kappa^{\gamma,J}(\alpha)$  de taille  $\alpha^{2J+3}$ . Pour montrer qu'il s'agit de la plus petite valeur propre, nous reprenons la preuve de [Bon05, théorème 10.4] réalisée pour le cas particulier  $\gamma = 0$ , en effet l'opérateur  $L^\alpha$  est une perturbation de l'opérateur  $P_\alpha$  de [Bon05, section 3] et les éléments de la preuve sont exactement les mêmes, c'est pourquoi nous nous contentons d'en donner les grandes lignes.

**Proposition 7.10.** *Pour tout  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$  on a le développement asymptotique suivant pour  $\alpha$  petit :*

$$\kappa(\gamma, \alpha) = \sum_{p=0}^J \kappa_p^\gamma \alpha^{2p+1} + O(\alpha^{2J+3}) \quad (7.30)$$

où les  $\kappa_p^\gamma$  ont été définis précédemment, on a en particulier

$$\kappa_0^\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad u_{\alpha}^{\gamma,0} = u^{\text{moy}}. \quad (7.31)$$

*Preuve :* La majoration est fournie par la construction de quasi-mode. Nous donnons les grandes lignes pour obtenir une minoration de la deuxième valeur propre de  $L^\alpha$  à partir des techniques de [Bon05]. On commence par remarquer à l'aide de la forme (7.7) qu'un vecteur propre  $u_\alpha$  de  $L^\alpha$  associé à une valeur propre d'ordre  $O(\alpha)$  vérifie

$$\frac{1}{2\alpha^2 t} |\partial_\eta u_\alpha|^2 = O(1).$$

Le terme en  $\frac{1}{t}$  ne permet pas de déduire directement une estimation de la projection de  $u_\alpha$  sur l'espace des fonctions qui ne dépendent pas de  $\eta$ . On suit alors l'analyse de [Bon05] : les théorèmes 7.1 et 7.2 de [Bon05] montrent que le vecteur propre est localisé dans un secteur tronqué de rayon  $R$  avec  $R = O(\frac{1}{\alpha})$ . On introduit l'opérateur obtenu à partir de la forme quadratique (7.7) sur le secteur tronqué avec une condition de Dirichlet sur le bord artificiel qui correspond à la troncature, cf [Bon05, sous-section 8.3]. Sur ce nouveau domaine, le terme  $\frac{1}{\alpha^2 t}$  peut être minoré par un terme régulier et la proposition 9.1 de [Bon05] montre que les vecteurs propres de l'opérateur régularisé sur le secteur tronqué sont proches des vecteurs propres de  $\mathfrak{l}^{\text{moy}}$  pour une troncature convenable et  $\alpha$  petit. Le lemme 10.2 de [Bon05] donne une minoration de la deuxième valeur propre de cet opérateur régularisé sur le secteur tronqué. Le lemme 10.3 de [Bon05] repose sur les estimations de localisation des vecteurs propres, il montre que les valeurs propres du problème tronqué et régularisé sont proches des valeurs propres du problème initial et permet de conclure.  $\square$

Cette asymptotique donne une approximation pour le premier vecteur propre de l'opérateur sur le secteur. Pour un potentiel magnétique  $\underline{A} \in \mathcal{A}(b_3)$  nous notons  $v_{\underline{A},\alpha}^\gamma$  un vecteur propre normalisé de l'opérateur  $P_{\underline{A},S_\alpha} + V_{\underline{B},0}$  associé à la première valeur propre  $\kappa(\gamma, \alpha)$ . Nous rappelons que l'opérateur  $L^\alpha$  a été obtenu à partir de l'opérateur  $P_{\underline{A}^s, S_\alpha} + V_{\underline{B},0}$  en réalisant les transformations successives suivantes : un passage en coordonnées polaires  $(r, \phi)$ , un changement de jauge associé à la fonction  $\varphi(r, \phi) = \frac{r^2}{2}\phi$  puis une mise à

l'échelle  $(t, \eta) = (\frac{\alpha r^2}{2}, \frac{\phi}{\alpha})$ . Nous notons  $v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, J}$  la fonction obtenue à partir du quasi-mode  $u_{\alpha}^{\gamma, J}$  en remontant ces transformations successives jusqu'aux variables initiales  $(x_1, x_2)$  :

$$v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, J}(x_1, x_2) := e^{i\varphi(r, \phi)} u_{\alpha}^{\gamma, J}(t, \eta) . \quad (7.32)$$

Nous utilisons le changement de jauge associé à la fonction

$$\underline{\varphi}^R(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1x_2b_3$$

qui montre que l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^S, S_{\alpha}} + V_{\underline{\mathbf{B}}, 0}$  est unitairement équivalent à  $P_{\underline{\mathbf{A}}^R, S_{\alpha}} + V_{\underline{\mathbf{B}}, 0}$  (voir la sous-section 3.1.1 et la proposition B.2 pour des rappels sur les changements de jauge). Nous notons  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, J}$  la fonction obtenue à partir de  $v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, J}$  et du changement de jauge associé à la fonction  $\underline{\varphi}^R$  :

$$v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, J}(x_1, x_2) := e^{i\underline{\varphi}^R(x_1, x_2)} v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, J}(x_1, x_2) . \quad (7.33)$$

On déduit de (7.28) et de l'asymptotique (7.30) une estimation sur le vecteur propre  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma}$  :

**Proposition 7.11.** *Soit  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma}$  un vecteur propre normalisé associé à la première valeur propre  $\kappa(\gamma, \alpha)$  de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^R, S_{\alpha}} + V_{\underline{\mathbf{B}}, 0}$ . On a une estimation quand  $\alpha$  tend vers 0 :*

$$\|v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma} - v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, J}\|_{H_{\underline{\mathbf{A}}^R, V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}}^1(S_{\alpha})} = O(\alpha^{2J+2}) .$$

Au premier ordre, on obtient en notant  $(r, \phi)$  les coordonnées polaires de  $(x_1, x_2)$  :

$$v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, 0}(x_1, x_2) = 3^{-1/4} e^{i\frac{r^2}{2}b_3(\phi - \cos \phi \sin \phi)} e^{-\frac{\alpha r^2}{4\sqrt{3}}} .$$

On a la majoration  $|\phi - \sin \phi \cos \phi| < \frac{2}{3}\phi^3$ , et en utilisant  $\phi \in (-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$ , on obtient

$$\left| \arg(v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, 0}) \right| < \frac{\alpha^3 r^2}{24} .$$

On déduit que la fonction  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, 0}$  a une phase très proche de 0 près du coin du secteur pour  $\alpha$  suffisamment petit. Or cette fonction est proche du vecteur propre  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma}$  de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^R, S_{\alpha}} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  sur le secteur. On s'attend donc à ce que pour  $\alpha$  assez petit, le vecteur propre  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma}$  oscille peu près du coin. C'est pourquoi nous choisirons souvent le potentiel  $\underline{\mathbf{A}}^R$  pour réaliser les calculs numériques dans ce chapitre.

Sur la figure 7.3, nous comparons des calculs effectués avec deux potentiels différents. On a pris  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et  $\gamma = 0$  : le champ magnétique est parallèle à l'arête du dièdre. On trace le logarithme du module et la phase des fonctions propres calculées pour les opérateurs  $P_{\underline{\mathbf{A}}^R, S_{\alpha}} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  et  $P_{\underline{\mathbf{A}}^S, S_{\alpha}} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$ . On constate que les modules sont très proches et que les phases présentent des singularités aux mêmes points. On observe que le premier vecteur propre calculé pour l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^R, S_{\alpha}} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  a une phase proche de 0 dans un voisinage du coin du secteur.

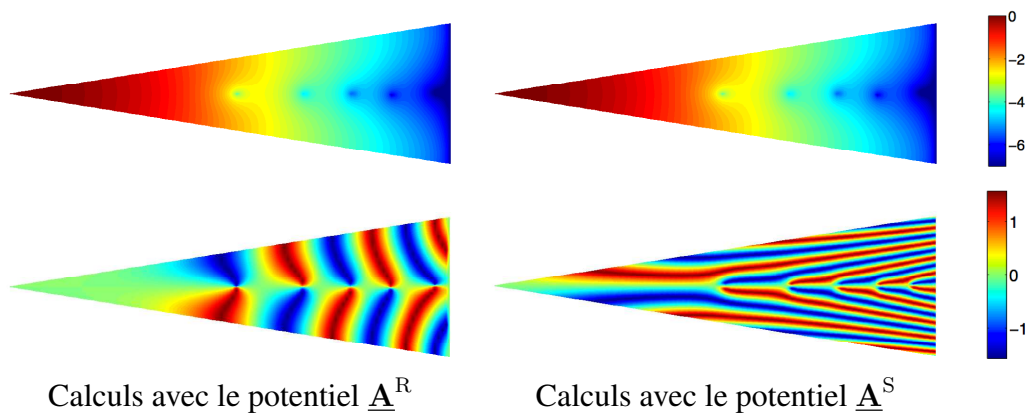


FIGURE 7.3 – Valeurs des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et  $\gamma = 0$ . Logarithme du module et phase modulo  $\pi$  du vecteur propre. Logarithme en base 10 seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . Domaine :  $\text{Tri}(40, 20, \frac{\pi}{10})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . A gauche : calculs effectués avec le potentiel  $\underline{A}^R$ . A droite : calculs effectués avec le potentiel  $\underline{A}^S$ .

Nous notons  $\check{\kappa}(\gamma, \alpha)$  une approximation numérique de  $\kappa(\gamma, \alpha)$  calculée par éléments finis. Sur la figure 7.4 nous traçons  $\check{\kappa}(\gamma, \alpha)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  dans  $(0, \pi)$  et pour  $\gamma \in \{0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\}$ . Pour  $\gamma = 0$ , on retrouve  $\mu(\alpha)$ . On constate que pour ces trois valeurs de  $\gamma$ , les calculs sont proches de la valeur  $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$  prévue par l'asymptotique (7.30) lorsque  $\alpha$  est petit. On constate que pour  $\alpha$  fixé, les valeurs  $\check{\kappa}(\gamma, \alpha)$  sont croissantes avec  $\gamma$  et que pour  $\gamma$  fixé, elles sont croissantes avec  $\alpha$ .

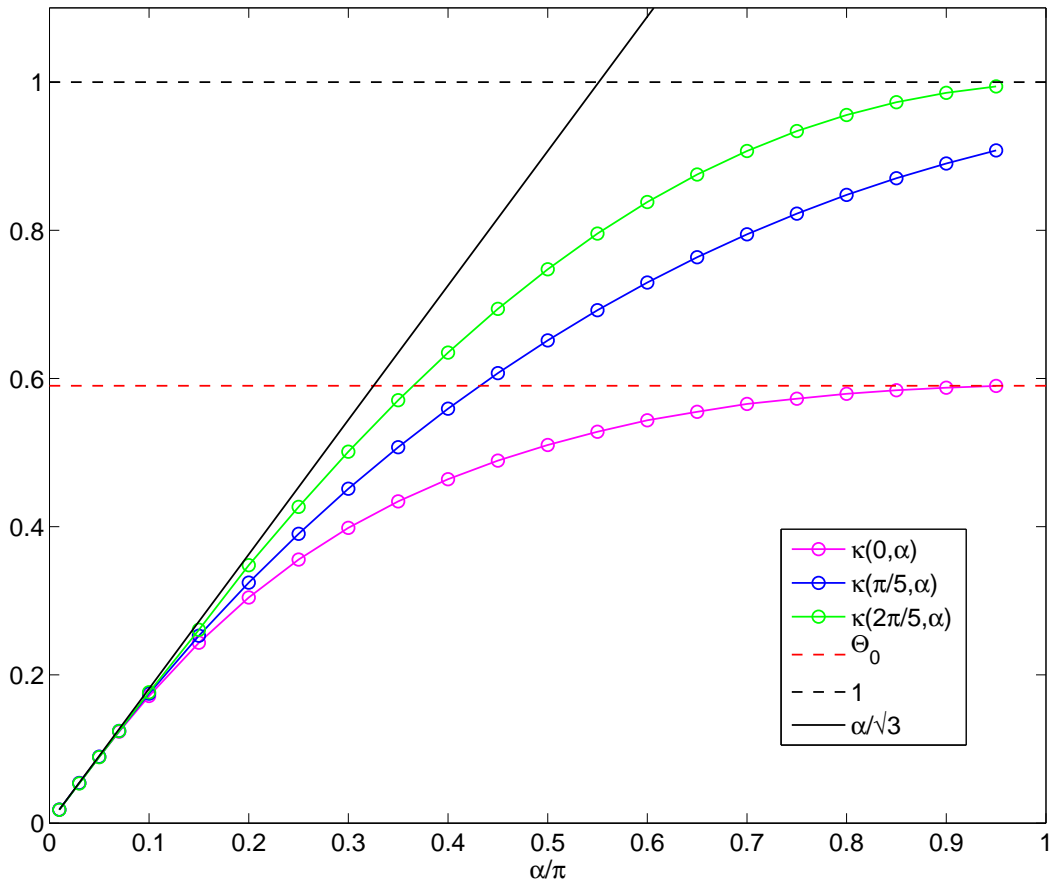


FIGURE 7.4 –  $\check{\kappa}(\gamma, \alpha)$  selon  $\vartheta := \frac{\alpha}{\pi}$  pour  $\gamma = \frac{k\pi}{5}$ ,  $0 \leq k \leq 2$  et  $\vartheta = \frac{k}{20}$ ,  $1 \leq k \leq 19$  comparé à l'asymptotiques  $\kappa^{\gamma,0}(\alpha)$  ainsi qu'aux constantes  $\Theta_0$  et 1. Domaine :  $\text{Tri}(L, 20, \alpha)$  avec  $L = 20$  si  $\alpha \geq \frac{\pi}{10}$  et  $L = 60$  si  $\alpha < \frac{\pi}{10}$ . Degré :  $\mathbb{P}_4$ . Potentiel magnétique :  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^{\text{R}}$ .

Sur la figure 7.5, nous traçons les vecteurs propres associés à  $\check{\kappa}(\gamma, \alpha)$  pour  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et différentes valeurs de  $\gamma$ . Lorsque  $\gamma = 0$ , le champ magnétique est parallèle à l'arête, et lorsque  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , le champ magnétique est perpendiculaire à l'arête du dièdre et l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^R, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  est réel (cf la table 3.1). On constate que lorsque  $\gamma$  croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , les vecteurs propres oscillent de moins en moins. On rappelle que la droite  $\Upsilon$  d'équation  $x_2 = 0$  est la droite d'annulation du potentiel. Lorsque  $\gamma$  augmente, la phase des vecteurs propres le long de  $\Upsilon$  tend vers 0. On constate aussi que les singularités de la phase sont moins nombreuses quand  $\gamma$  augmentent.

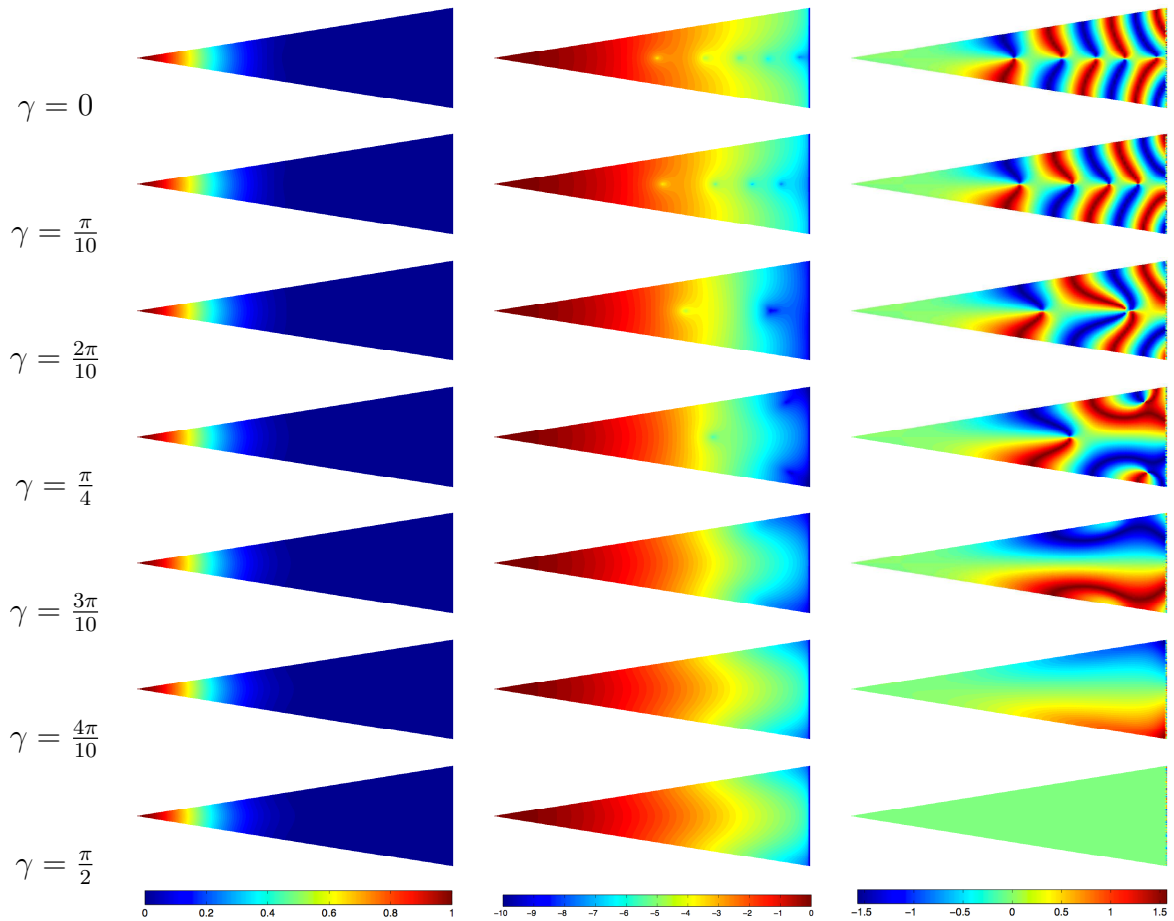


FIGURE 7.5 – Valeurs des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et  $\gamma = \frac{k\pi}{10}$ ,  $0 \leq k \leq 5$  et  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . Vecteurs propres associés à  $\check{\kappa}(\alpha, \gamma)$ . De gauche à droite : le module, le logarithme en base 10 du module et la phase modulo  $\pi$ . Logarithme seuillé pour des valeurs inférieures à  $-10$ . Domaine :  $\text{Tri}(40, 20, \frac{\pi}{10})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . Potentiel magnétique :  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^R$ .



Sur la figure 7.6, nous traçons les vecteurs propres associés à  $\check{\kappa}(\gamma, \alpha)$  pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\gamma \in \{0, \frac{\pi}{5}\}$ . On voit clairement la droite d'annulation du potentiel  $\Upsilon$  (qui est la bissectrice du secteur ici, cf (7.6)) apparaître quand  $\gamma$  augmente. Le vecteur propre a une phase proche de 0 le long de cette droite pour  $\gamma = \frac{\pi}{5}$ . On constate que dans les deux cas, la phase a des singularités qui coïncident avec des minima locaux du module.

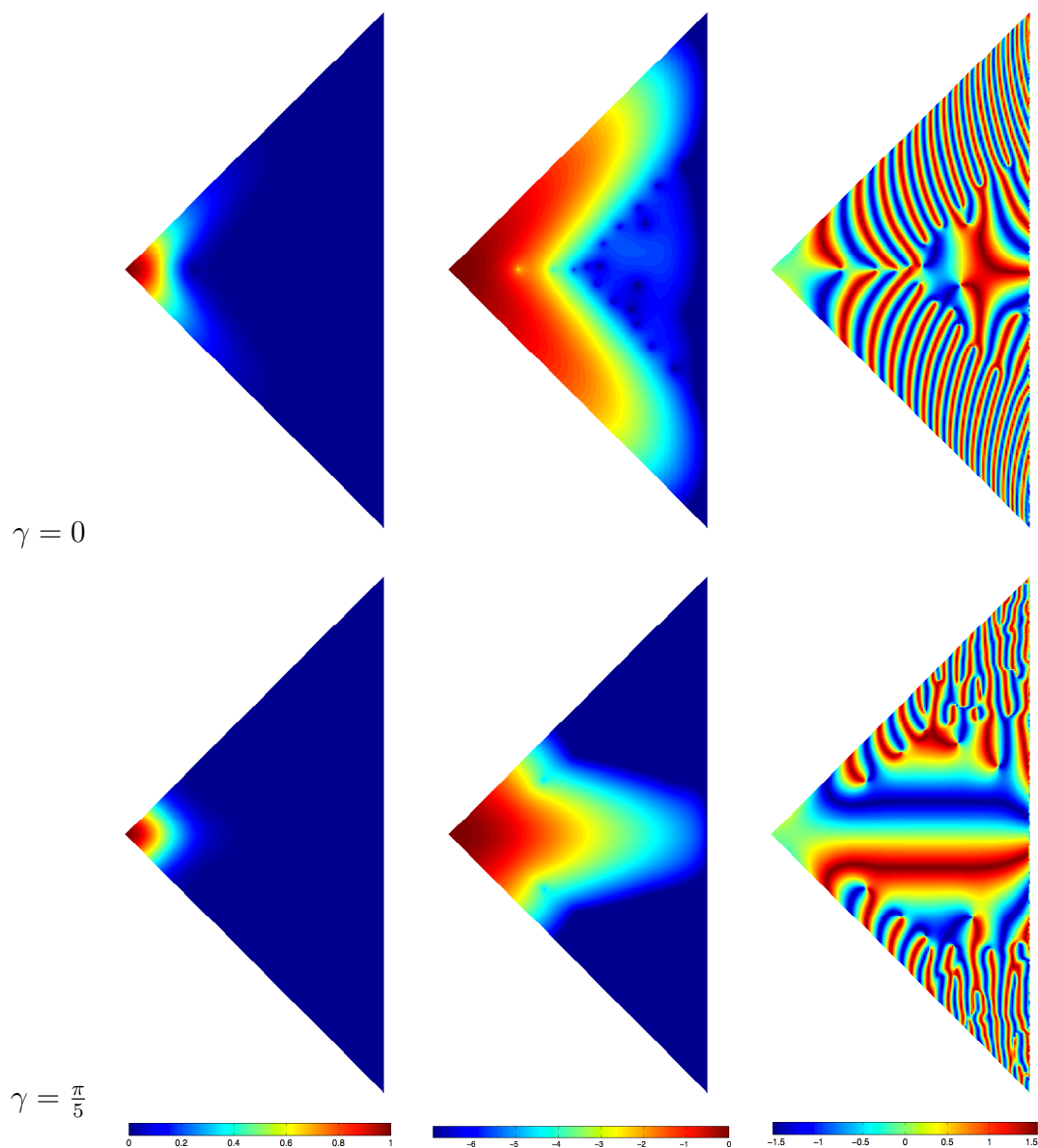


FIGURE 7.6 – Valeurs des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma = 0$  et  $\gamma = \frac{\pi}{5}$ . Vecteurs propres associés à  $\check{\kappa}(\alpha, \gamma)$ . De gauche à droite : le module, le logarithme du module et la phase modulo  $\pi$ . Logarithme seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . Domaine :  $\text{Tri}(40, 15, \frac{\pi}{2})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . Potentiel magnétique :  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^{\text{R}}$ .

## 7.4 Description du développement à deux termes

Nous avons vu que le premier terme du développement asymptotique (7.30) ne dépend pas de  $\gamma$ . Nous explicitons le terme suivant à partir de la construction de quasi-modes de la section 7.3.1.

### 7.4.1 Calcul explicite

Les équations (7.24a) et (7.24b) nous amènent à chercher une fonction  $v_2^{\gamma,\perp}$  solution de

$$\forall t > 0, \begin{cases} -\partial_\eta^2 v_1^{\gamma,\perp} = 2t(\kappa^{\text{moy}} - L_0)u^{\text{moy}}, & (7.34a) \\ \partial_\eta v_1^{\gamma,\perp}(t, -\frac{1}{2}) = \partial_\eta v_1^{\gamma,\perp}(t, \frac{1}{2}) = 0, & (7.34b) \\ \int_{-1/2}^{1/2} v_1^{\gamma,\perp}(t, \eta) d\eta = 0. & (7.34c) \end{cases}$$

On calcule

$$2t(\kappa^{\text{moy}} - L_0)u^{\text{moy}} = \left( t \left( \frac{1}{6} - 2\eta^2 \right) + 2ib_3\eta \left( \frac{t}{\sqrt{3}} - 1 \right) \right) u^{\text{moy}}(t)$$

puis nous résolvons (7.34a) et (7.34b). On trouve

$$\partial_\eta v_1^{\gamma,\perp}(t, \eta) = \left( \frac{2t^2}{3} \left( 2\eta^3 - \frac{\eta}{2} \right) + itb_3 \left( 2\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right) u^{\text{moy}}(t)$$

puis

$$v_1^{\gamma,\perp}(t, \eta) = \left( \frac{2t^2}{3} \left( \frac{\eta^4}{2} - \frac{\eta^2}{4} + \frac{7}{480} \right) + itb_3 \left( \frac{2\eta^3}{3} - \frac{\eta}{2} \right) \left( 1 - \frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right) u^{\text{moy}}(t). \quad (7.35)$$

On utilise maintenant (7.26) : on a

$$\kappa_1^\gamma = \langle v_1^{\gamma,\perp}, L_0 u^{\text{moy}} \rangle_{L^2(\Omega_0)} + \ell_1(u^{\text{moy}}, u^{\text{moy}})$$

où la forme sesquilinéaire  $\ell_1$  est définie par (7.11). On calcule ces quantités avec maple et on trouve :

$$\kappa_1^\gamma = - \left( \frac{21b_3^2 + 2}{35\sqrt{3}} + \frac{b_1^2}{40\sqrt{3}} \right).$$

Il nous reste à déterminer la fonction  $v_1^\gamma \in \ker L_{-1}$ . Nous calculons le second membre de (7.27a). On utilise  $\Pi v_1^{\gamma,\perp} = 0$  et on a

$$\begin{aligned} R_1^\gamma &= \Pi \left( (\kappa_1^\gamma - L_1)u^{\text{moy}} - L_0 v_1^{\gamma,\perp} \right) \\ &= - \int_{-1/2}^{1/2} \left( \left( \frac{21b_3^2 + 2}{35\sqrt{3}} + \frac{b_1^2}{40\sqrt{3}} \right) + \frac{2b_3^2}{3} t\eta^4 \right) u^{\text{moy}} + L_0 v_1^{\gamma,\perp} d\eta \\ &= Q_1^\gamma u^{\text{moy}} \end{aligned}$$

où le polynôme  $Q_1^\gamma$  est défini par

$$Q_1^\gamma(t) := -\left(\frac{23\sqrt{3}}{840} + \frac{23\sqrt{3}b_3^2}{120}\right) - \left(\frac{23b_3^2}{120} + \frac{1}{120}\right)t + \frac{2\sqrt{3}b_3^2}{15}t^2 + \left(\frac{1}{945} - \frac{b_3^2}{45}\right)t^3.$$

Les équations (7.27a) et (7.27b) s'écrivent ici

$$\begin{cases} -2t(u_1^\gamma)''(t) - 2(u_1^\gamma)'(t) + \frac{t}{6}u_1^\gamma(t) - \frac{1}{\sqrt{3}}u_1^\gamma(t) = Q_1^\gamma(t)u^{\text{moy}}(t), & (7.36a) \\ \int_{\mathbb{R}_+} u_1^\gamma(t)u^{\text{moy}}(t) dt = 0. & (7.36b) \end{cases}$$

Nous utilisons le calcul de [Bon05, lemme 4.5] pour chercher une solution sous la forme  $v_1^\gamma(t) = P_1^{0,\gamma}(t)u^{\text{moy}}(t)$  où  $P_1^{0,\gamma}$  est un polynôme, en effet on a :

$$(\mathfrak{l}^{\text{moy}} - \kappa^{\text{moy}})P_1^{0,\gamma}u^{\text{moy}} = \left(-2(P_1^{0,\gamma})' + \frac{2t(P_1^{0,\gamma})'}{\sqrt{3}} - 2t(P_1^{0,\gamma})''\right)u^{\text{moy}}.$$

Nous cherchons donc un polynôme  $P_1^{0,\gamma}$  vérifiant

$$\begin{cases} -2(P_1^{0,\gamma})' + \frac{2t(P_1^{0,\gamma})'}{\sqrt{3}} - 2t(P_1^{0,\gamma})'' = Q_1^\gamma, \\ \int_{\mathbb{R}_+} P_1^{0,\gamma}(t)|u_0(t)|^2 dt = 0. \end{cases} \quad (7.37)$$

On utilise

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}_+} t^k |u_0(t)|^2 dt = k!(\sqrt{3})^{k+1}.$$

Nous déduisons après calculs

$$P_1^{0,\gamma}(t) = -\left(\frac{13b_3^2}{168} + \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{23\sqrt{3}}{1680} + \frac{23\sqrt{3}b_3^2}{240}\right)t + \left(\frac{23b_3^2}{480} + \frac{1}{224}\right)t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{5670} - \frac{\sqrt{3}b_3^2}{270}\right)t^3.$$

Nous avons donc montré :

**Proposition 7.12.** *Soit  $\mathbf{B} = (b_1, 0, b_3) = (\sin \gamma, 0, \cos \gamma)$  un champ magnétique constant unitaire. Soit  $\kappa^{\gamma,1}(\gamma, \alpha)$  l'asymptotique à deux termes fournie par la proposition 7.10 pour la première valeur propre de l'opérateur  $L^\alpha$ . Alors on a*

$$\kappa^{\gamma,1}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} - \left(\frac{21 \cos^2 \gamma + 2}{35\sqrt{3}} + \frac{\sin^2 \gamma}{40\sqrt{3}}\right)\alpha^3. \quad (7.38)$$

Le quasi-mode associé vaut

$$u_\alpha^{\gamma,1}(t, \eta) = \left(1 + \alpha^2 \left(P_1^{\text{R},\gamma}(t, \eta) + iP_1^{\text{I},\gamma}(t, \eta) + P_1^{0,\gamma}(t)\right)\right) u^{\text{moy}}(t) \quad (7.39)$$

avec

$$\begin{cases} P_1^{\text{R},\gamma}(t, \eta) = \frac{2t^2}{3} \left(\frac{\eta^4}{2} - \frac{\eta^2}{4} + \frac{7}{480}\right) \\ P_1^{\text{I},\gamma}(t, \eta) = tb_3 \left(\frac{2\eta^3}{3} - \frac{\eta}{2}\right) \left(1 - \frac{t}{\sqrt{3}}\right) \\ P_1^{0,\gamma}(t) = -\left(\frac{13b_3^2}{168} + \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{23\sqrt{3}}{1680} + \frac{23\sqrt{3}b_3^2}{240}\right)t + \left(\frac{23b_3^2}{480} + \frac{1}{224}\right)t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{5670} - \frac{\sqrt{3}b_3^2}{270}\right)t^3 \\ u^{\text{moy}}(t) = 3^{-1/4}e^{-\frac{t}{2\sqrt{3}}}. \end{cases}$$

Dans le cas  $\gamma = 0$  (c'est-à-dire  $b_3 = 1$ ), les développements à deux termes  $\kappa^{\gamma,1}(\alpha)$  et  $u_{\alpha}^{\gamma,1}$  coïncident avec ceux obtenus dans [Bon05, sous-section 5.3].

On constate que le deuxième terme du développement asymptotique  $\kappa^{\gamma,1}(\alpha)$  est croissant par rapport à  $b_1$  (c'est-à-dire par rapport à  $\gamma$ ).

Sur la figure 7.7, on trace la quantité  $\kappa(\gamma, \alpha)$  calculée pour  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et pour différentes valeurs de  $\gamma$ . On compare ces calculs avec les asymptotiques à un terme et à deux termes. On voit que l'asymptotique à deux termes  $\kappa^{\gamma,1}(\alpha)$  donnée par (7.38) est plus précise que le premier terme  $\kappa^{\gamma,0}(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ .

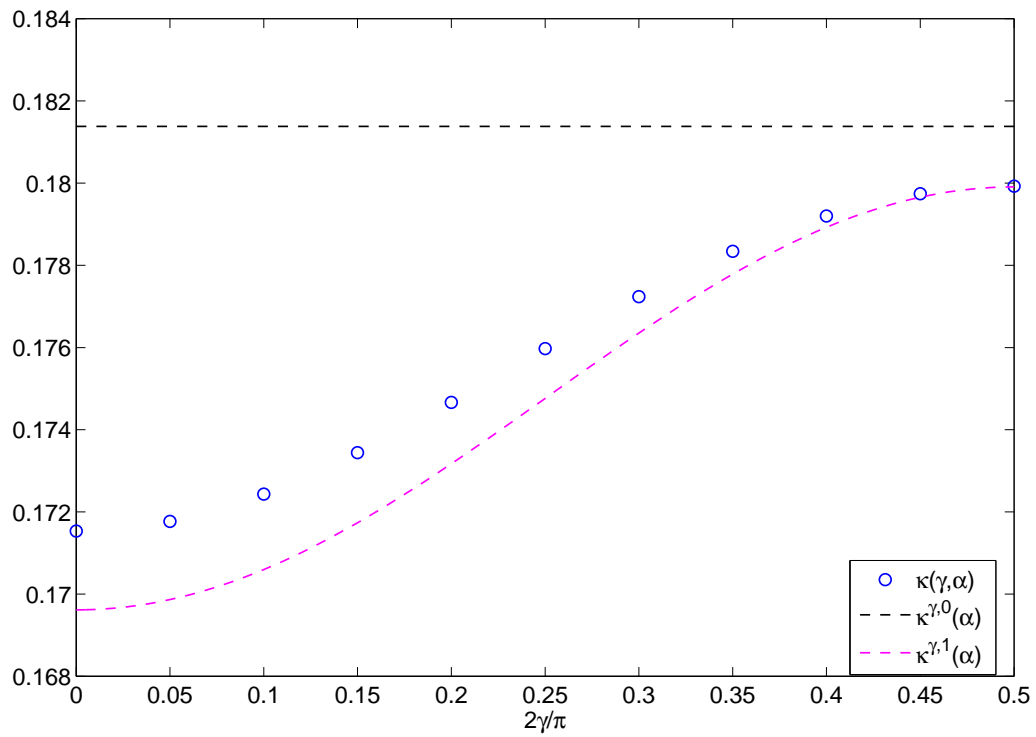


FIGURE 7.7 – Valeurs des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{10}$ .  $\kappa(\gamma, \alpha)$  selon  $\vartheta := \frac{2}{\pi}\gamma$  pour  $\vartheta = \frac{k}{20}$ ,  $0 \leq k \leq 10$  comparé aux asymptotiques  $\kappa^{\gamma,0}(\alpha)$  et  $\kappa^{\gamma,1}(\alpha)$ . Domaine :  $\text{Tri}(40, 20, \frac{\pi}{10})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . Potentiel magnétique :  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^{\text{R}}$ .

## 7.4.2 Localisation des zéros du quasi-mode à deux termes

Nous cherchons si  $u_{\alpha}^{\gamma,1}$  s'annule quelque part. On constate que la partie imaginaire de  $u_{\alpha}^{\gamma,1}$  est impaire par rapport à  $\eta$ . Celle-ci est donc nulle sur l'ensemble  $\{\eta = 0\}$ , c'est-à-dire sur la bissectrice du secteur  $S_{\alpha}$ . Nous restreignons le quasi-mode à cette demi-droite :

$$u_{\alpha}^{\gamma,1}(t, 0) = P_1^{\gamma, \text{biss}}(t) u^{\text{moy}}(t)$$

avec

$$P_1^{\gamma, \text{biss}}(t) = 1 + \alpha^2 \left( -\frac{13b_3^2 + 63}{168} + \left( \frac{23\sqrt{3}}{1680} + \frac{23\sqrt{3}b_3^2}{240} \right) t + \left( \frac{23b_3^2}{480} + \frac{1}{224} + \frac{7}{720} \right) t^2 + \frac{(1-21b_3^2)\sqrt{3}}{5670} t^3 \right).$$

**Proposition 7.13.** Pour  $\cos^2 \gamma > \frac{1}{21}$  et  $\alpha^2 < \frac{168}{13 \cos^2 \gamma + 63}$ , le polynôme  $t \mapsto P_1^{\gamma, \text{biss}}(t)$  s'annule une et une seule fois sur l'axe  $\{t > 0\}$ . Nous notons  $t_\alpha \in (0, +\infty)$  ce point d'annulation.

*Preuve :* On observe que  $u_\alpha^{\gamma, 1}(0, 0) > 0$  et que le coefficient en  $t^3$  est négatif. De plus on note que  $\partial_t P_1^{\gamma, \text{biss}}(0) > 0$ . Comme

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} P_1^{\gamma, \text{biss}}(t) = +\infty ,$$

la dérivée  $\partial_t P_1^{\gamma, \text{biss}}(t)$  s'annule au moins une fois sur  $(-\infty, 0)$ , et donc au plus une fois sur  $(0, +\infty)$ . Ainsi puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_1^{\gamma, \text{biss}}(t) = -\infty$ , la fonction  $P_1^{\gamma, \text{biss}}$  s'annule une et une seule fois sur  $(0, +\infty)$ .  $\square$

**Remarque 7.14.** La condition  $\alpha^2 < \frac{168}{13 \cos^2 \gamma + 63}$  est satisfaite pour tout  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$  dès que  $\alpha < 1.485$ .

Nous donnons un développement asymptotique de  $t_\alpha$  quand  $\alpha$  tend vers 0. On a besoin du

**Lemme 7.15.** Soit  $P_\alpha(t) := c_0 + \alpha^2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)$  un polynôme réel avec  $a_3 < 0$  et  $c_0 > 0$ . Il existe une racine  $x_\alpha > 0$  de  $P_\alpha$  qui a le développement asymptotique suivant pour  $\alpha$  petit :

$$x_\alpha = \left(-\frac{c_0}{a_3}\right)^{\frac{1}{3}} \alpha^{-\frac{2}{3}} - \frac{a_2}{3a_3} + O\left(\alpha^{\frac{2}{3}}\right) .$$

*Preuve :* On réalise un changement d'échelle en posant  $\epsilon = \alpha^{\frac{2}{3}}$  et  $u = \epsilon t$ . On note

$$P_\alpha(t) = F(\epsilon, u) := c_0 + \epsilon^3 a_0 + \epsilon^2 a_1 u + \epsilon a_2 u^2 + a_3 u^3 .$$

On remarque que  $F(0, u_0) = 0$  avec  $u_0 := \left(-\frac{c_0}{a_3}\right)^{\frac{1}{3}}$ . On calcule

$$\partial_\epsilon F(0, u_0) = a_2 u_0^2 ,$$

et

$$\partial_u F(0, u_0) = 3a_3 u_0^2 .$$

Cette dernière quantité étant non nulle, le théorème des fonctions implicites s'applique : il existe une fonction régulière  $\phi$  définie dans un voisinage de 0 telle que pour  $\epsilon$  assez petit :

$$F(\epsilon, \phi(\epsilon)) = 0 .$$

De plus,  $\phi$  vérifie

$$\phi'(0) = -\partial_\epsilon F(0, u_0) / \partial_u F(0, u_0) .$$

On a donc

$$\phi'(0) = -\frac{a_2}{3a_3}$$

et par une formule de Taylor :

$$\phi(\epsilon) = u_0 - \epsilon \frac{a_2}{3a_3} + O(\epsilon^2) .$$

On déduit

$$x_\alpha = u_0 \alpha^{-\frac{2}{3}} - \frac{a_2}{3a_3} + O(\alpha^{\frac{2}{3}}) .$$

□

On déduit un développement pour la racine positive de  $u_\alpha^{\gamma,1}$  quand  $\alpha$  tend vers 0 :

**Corollaire 7.16.** *Soit  $\mathbf{B} = (b_1, 0, b_3) = (\sin \gamma, 0, \cos \gamma)$  un champ magnétique constant unitaire. Nous nous plaçons dans les hypothèses de la proposition 7.13. Alors on a quand  $\alpha$  tend vers 0 :*

$$t_\alpha = \left( \frac{1890\sqrt{3}}{21b_3^2 - 1} \right)^{1/3} \alpha^{-2/3} + \frac{(483b_3^2 + 143)\sqrt{3}}{16(21b_3^2 - 1)} + O(\alpha^{2/3}) . \quad (7.40)$$

Dans les coordonnées polaires initiales  $(r, \phi)$  (voir la section 7.2), on obtient en utilisant  $t = \alpha \frac{r^2}{2}$  :

$$r_\alpha^{\text{qm}} = \left( \frac{15120\sqrt{3}}{21b_3^2 - 1} \right)^{1/6} \alpha^{-5/6} + \frac{483b_3^2 + 143}{3360} \left( \frac{35\sqrt{3}}{21b_3^2 - 1} \right)^{5/6} 2^{1/3} \sqrt{3} \alpha^{-1/6} + O(\alpha^{1/2})$$

où nous avons noté  $r_\alpha^{\text{qm}}$  l'abscisse du zéro du quasi-mode dans les variables initiales le long de la bissectrice. Dans le cas  $b_3 = 1$ , on trouve numériquement

$$r_\alpha^{\text{qm}} \approx 3.308\alpha^{-5/6} + 1.024\alpha^{-1/6} + O(\alpha^{1/2}) .$$

## 7.5 Calculs numériques et représentation des quasi-modes à un et deux termes

Nous rappelons que nous avons noté respectivement  $u_\alpha^{\gamma,0}$  et  $u_\alpha^{\gamma,1}$  les quasi-modes à un et deux termes construits dans les variables  $(t, \eta) \in (0, +\infty) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  pour l'opérateur  $L^\alpha$  (voir (7.21) et (7.39)). Nous représentons ces quasi-modes dans les variables cartésiennes initiales

$$(x_1, x_2) = \left( \sqrt{\frac{2t}{\alpha}} \cos(\alpha\eta), \sqrt{\frac{2t}{\alpha}} \sin(\alpha\eta) \right)$$

à l'aide des fonctions  $v_{\underline{\mathbf{A}}^{\text{R}},\alpha}^{\gamma,J}$  et  $v_{\underline{\mathbf{A}}^{\text{S}},\alpha}^{\gamma,J}$  définies en (7.32) et (7.33). Nous comparons ces quasi-modes analytiques avec les vecteurs propres issus du calcul numérique par éléments finis.

### 7.5.1 Comparaison des calculs numériques et des quasi-modes

Le quasi-mode à un terme  $v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, 0}$  associé à l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^S, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  s'écrit dans les coordonnées polaires  $(r, \phi)$  associées à  $(x_1, x_2)$  :

$$v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, 0}(x_1, x_2) = 3^{-1/4} e^{i \frac{r^2}{2} b_3 \phi} e^{-\frac{\alpha r^2}{4\sqrt{3}}}$$

avec  $b_3 = \cos \gamma$ . En particulier il ne s'annule pas et sa phase est définie sur tout le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$ .

Sur la figure 7.8, nous traçons de haut en bas : le vecteur propre calculé par éléments finis pour la première valeur propre de l'opérateur  $P_{\underline{\mathbf{A}}^S, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\underline{\mathbf{B}}, \tau}$  et les quasi-modes à un et deux termes  $v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, 0}$  et  $v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, 1}$ . On a pris  $\gamma = 0$  et  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  : le champ magnétique est parallèle à l'arête du dièdre. Nous représentons le logarithme du module (à gauche) et la phase modulo  $\pi$  (à droite). On constate que les singularités de la phase ne se retrouvent pas sur le quasi-mode à un terme  $v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, 0}$ . En revanche le zéro du quasi-mode à deux termes  $v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, 1}$  coïncide avec la première singularité de la phase du vecteur propre. On note que les autres singularités du vecteur propre ne se retrouvent pas chez le quasi-mode  $v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, 1}$  qui ne s'annule qu'une seule fois (voir la proposition 7.13).

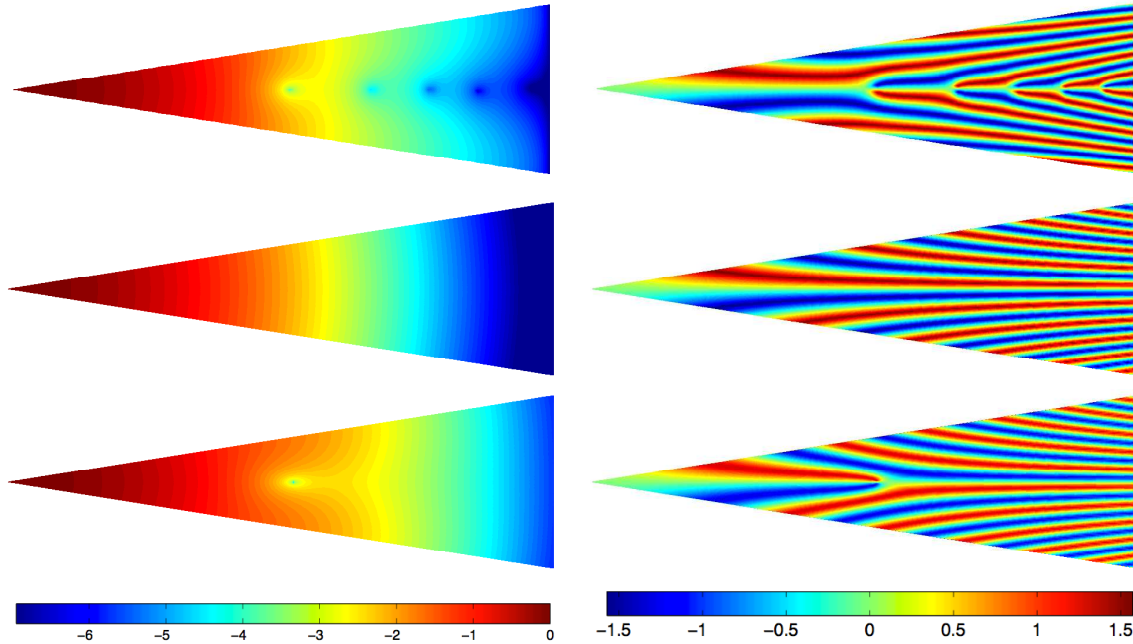


FIGURE 7.8 – Valeurs des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et  $\gamma = 0$ . En haut : vecteur propre associé à  $\tilde{\kappa}(\alpha, \gamma)$ . En bas : quasi-mode  $v_{\underline{\mathbf{A}}^S, \alpha}^{\gamma, 1}$ . De gauche à droite : le logarithme du module et la phase modulo  $\pi$ . Logarithme seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . Domaine de calcul pour le vecteur propre :  $\text{Tri}(40, 20, \frac{\pi}{10})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . Potentiel magnétique :  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^S$ .

Sur la figure 7.9, nous avons pris les mêmes valeurs pour les paramètres et nous avons réalisé le calcul pour le potentiel  $\underline{\mathbf{A}}^R$ . Nous comparons le calcul par éléments finis avec

le quasi-mode à deux termes  $v_{\underline{\mathbf{A}}^{\mathbf{S}},\alpha}^{\gamma,1}$  défini en (7.32). Encore une fois on observe que la singularité la plus proche de l'origine coïncide avec le zéro du quasi-mode.

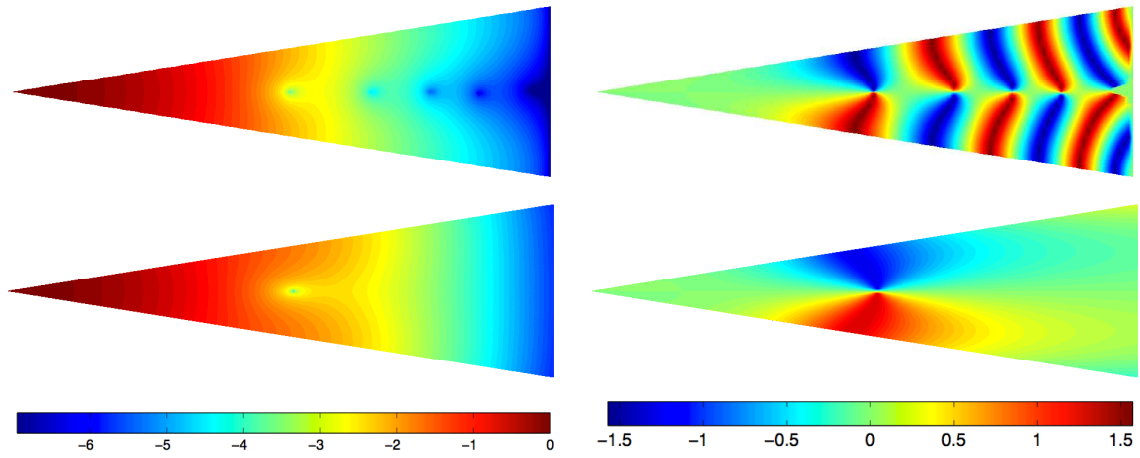


FIGURE 7.9 – Valeurs des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et  $\gamma = 0$ . En haut : vecteur propre associé à  $\check{\kappa}(\alpha, \gamma)$ . En bas : quasi-mode à deux termes  $v_{\underline{\mathbf{A}}^{\mathbf{R}},\alpha}^{\gamma,1}$ . De gauche à droite : le logarithme du module et la phase modulo  $\pi$ . Logarithme seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . Domaine de calcul pour le vecteur propre :  $\text{Tri}(40, 20, \frac{\pi}{10})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . Potentiel magnétique :  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^{\mathbf{R}}$ .



Sur la figure 7.10, nous avons pris  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et  $\gamma = \frac{\pi}{5}$  et nous traçons les mêmes quantités que sur la figure 7.9. Nous constatons que le quasi-mode reste proche du vecteur propre près du coin du secteur et que le premier zéro du vecteur propre semble encore correspondre avec celui du quasi-mode. L'approximation est moins bonne loin de l'origine.

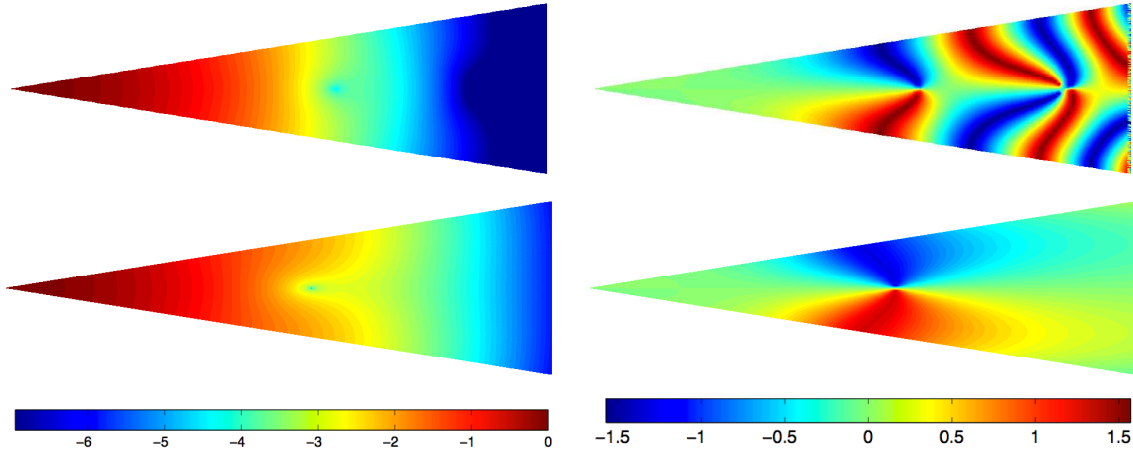


FIGURE 7.10 – Valeurs des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  et  $\gamma = \frac{\pi}{5}$ . Vecteurs propres associés à  $\check{\kappa}(\alpha, \gamma)$  et quasi-modes  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, 1}$ . De gauche à droite : le module, le logarithme du module et la phase modulo  $\pi$ . Logarithme seuillé pour des valeurs inférieures à  $-7$ . Domaine :  $\text{Tri}(40, 20, \frac{\pi}{10})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . Potentiel magnétique :  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^R$  et  $\alpha = \frac{\pi}{10}$ .

### 7.5.2 Etude des zéros du vecteur propre

Nous nous intéressons ici au cas particulier  $\gamma = 0$ , c'est-à-dire  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ . L'opérateur sur le secteur est alors  $P_{\underline{\mathbf{A}}, S_\alpha}$ . On remarque sur les calculs précédents que la phase est très proche de 0 le long de la bissectrice sauf éventuellement près des singularités. En effet il est possible pour des raisons de parité de choisir un vecteur propre dont la partie imaginaire est impaire par rapport à la droite d'équation  $x_2 = 0$ . La partie imaginaire d'un tel vecteur propre est donc nulle le long de la bissectrice. Nous notons  $\check{r}_\alpha$  le premier zéro rencontré sur la bissectrice du vecteur calculé par éléments finis. Pour détecter un tel zéro, nous interpolons la partie réelle du vecteur propre le long de la bissectrice à partir du calcul par éléments finis et nous prenons comme valeur pour  $\check{r}_\alpha$  la première abscisse où a lieu un changement de signe.

Le quasi-mode à deux termes  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, 1}$  restreint à l'axe réel est analytique en  $x_1$  et nous nous servons de Mathematica pour déterminer sur les figures 7.11 et 7.12 la valeur de la racine de la fonction  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, 1}$  restreinte à l'axe réel. Dans la sous-section 7.4.2, nous avons noté  $r_\alpha^{\text{qm}}$  l'abscisse de la racine du quasi-mode sur la bissectrice.

Sur la figure 7.11 nous traçons les valeurs  $\check{r}_\alpha$  selon  $\log(\frac{\alpha}{\pi})$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . L'angle  $\alpha$  évolue de  $\frac{\pi}{200}$  à  $\frac{\pi}{2}$ . Nous traçons aussi les racines des quasi-modes  $v_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^1$  situées sur l'axe réel. Sur la figure 7.12, nous traçons le ratio des valeurs de  $\check{r}_\alpha$  par rapport  $r_\alpha^{\text{qm}}$  selon  $\log(\frac{\alpha}{\pi})$ . On constate que les racines du vecteur propre coïncident avec celles du quasi-mode pour certaines valeurs de  $\alpha$ , ce que l'on avait vu dans la sous-section précédente. En revanche pour  $\alpha$  très petit, les racines du vecteur propre sont plus éloignées du coin que celles du quasi-mode. Nous donnons une heuristique pour comprendre ce phénomène : le quasi-mode n'est pas une bonne approximation du vecteur propre loin de l'origine. La convergence des quasi-modes vers les vecteurs propres a lieu en norme  $H_{\underline{\mathbf{A}}^R}^1(\mathcal{S}_\alpha)$  et les quasi-modes sont localisés dans une zone du type " $r \leq c\alpha^{-1/2}$ ". De plus les racines du quasi-mode sur la bissectrice tendent vers  $+\infty$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0 (voir le corollaire 7.16) avec un comportement du type  $r_\alpha \sim C\alpha^{-5/6}$ . Ainsi quand  $\alpha$  tend vers 0 les racines du quasi-mode sont situées dans une zone où le vecteur propre est exponentiellement petit et il n'est pas anormal que les racines des quasi-modes ne coïncident pas avec celles des vecteurs propres pour  $\alpha$  trop petit.

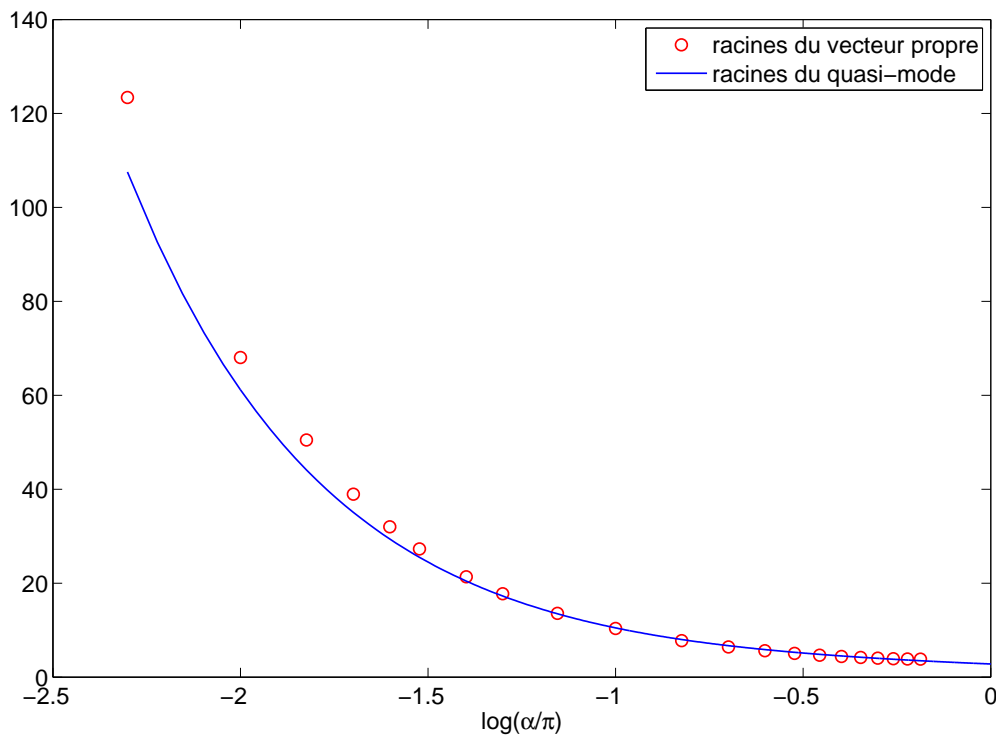


FIGURE 7.11 – Valeur du paramètre :  $\gamma = 0$ . Le premier zéro  $\check{r}_\alpha$  du vecteur propre selon  $\log \frac{\alpha}{\pi}$  comparé au premier zéro  $r_\alpha^{\text{qm}}$  du quasi-mode à deux termes  $v_{\alpha, \underline{\mathbf{A}}^R}^{\gamma, 1}$ .

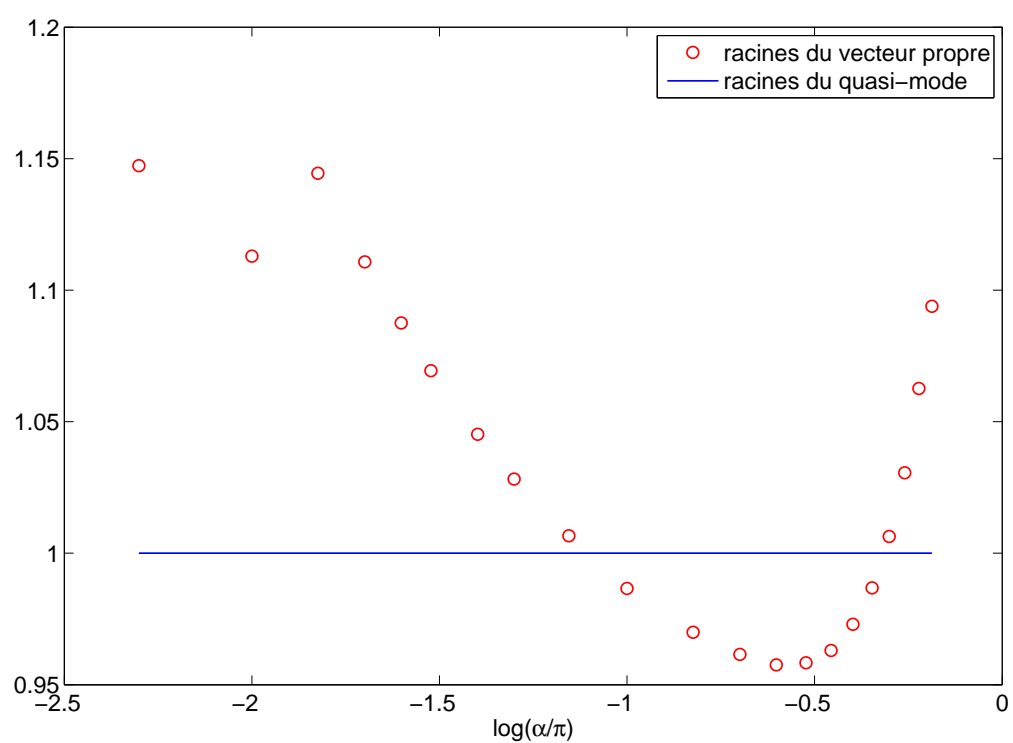


FIGURE 7.12 – Valeur du paramètre :  $\gamma = 0$ . Le rapport  $\check{r}_\alpha / r_\alpha^{\text{qm}}$  selon  $\log \frac{\alpha}{\pi}$ .

Sur la figure 7.13, nous avons pris  $\alpha = \frac{\pi}{20}$  et  $\gamma = 0$ . Nous traçons le logarithme du module du vecteur propre et du quasi-mode. On constate que l'approximation est bonne près du coin du secteur mais est effectivement moins bonne pour des abscisses trop grandes.

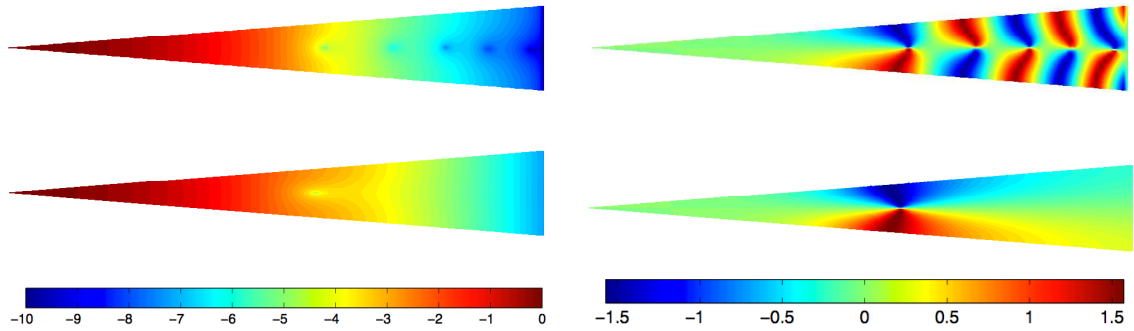


FIGURE 7.13 – Valeurs des paramètres :  $\alpha = \frac{\pi}{20}$  et  $\gamma = 0$ . En haut : vecteur propre associé à  $\kappa(\alpha, \gamma)$ . En bas : quasi-mode  $u_{\underline{\mathbf{A}}^R, \alpha}^{\gamma, 1}$ . De gauche à droite : le logarithme du module et la phase modulo  $\pi$ . Logarithme seuillé pour des valeurs inférieures à  $-10$ . Domaine de calcul pour le vecteur propre :  $\text{Tri}(40, 30, \frac{\pi}{20})$ . Degré :  $\mathbb{P}_3$ . Potentiel magnétique :  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^R$ .



## **Quatrième partie**

### **L'opérateur semi-classique sur un domaine avec une arête courbe**



# Chapitre 8

## Application aux lentilles

Nous nous intéressons à l'opérateur de Schrödinger avec paramètre semi-classique  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  (défini dans la section 0.1). Nous faisons l'hypothèse que le domaine  $\Omega$  est un domaine diédral de type particulier que nous appelons “lentille”. Nous décrivons dans la section 8.1 les hypothèses faites sur ce domaine de  $\mathbb{R}^3$ . En particulier une lentille possède une arête courbe notée  $\Gamma$  contenue dans plan noté  $\Pi$ . Un voisinage d'un point de l'arête d'ouverture  $\alpha$  est difféomorphe à un ouvert du dièdre infini  $\mathcal{D}_\alpha$ . Nous présentons les coordonnées locales qui permettent de passer d'un problème sur  $\Omega$  à un problème sur  $\mathcal{D}_\alpha$ . Dans les sections 8.1 à 8.3 nous prenons un champ magnétique  $\mathbf{B}$  orthogonal au plan de l'arête. La section 8.2 donne des méthodes pour utiliser un changement de variables dans la forme quadratique associée à l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$ . Nous utilisons ensuite une procédure classique de partition du domaine pour minorer grossièrement le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  quand  $h$  tend vers 0. Dans la section 8.3, on utilise les fonctions propres de l'opérateur sur le secteur étudié dans les chapitres précédents pour construire un quasi-mode sur la lentille. On déduit une asymptotique pour le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$ . Nous comparons ces résultats à ceux connus pour le cas régulier. Dans la section 8.4 nous envisageons le cas d'une lentille dont l'angle d'ouverture est variable. Dans la section 8.5, nous prenons une lentille d'angle d'ouverture fixe soumise à un champ magnétique tangent au plan de l'arête. Nous énonçons finalement dans la section 8.6 un résultat général pour une lentille soumise à un champ magnétique constant unitaire.

### 8.1 Lentille d'angle fixe et champ perpendiculaire au plan de l'arête

Nous commençons par donner quelques rappels pour le cas régulier. Si  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{B}$  est un champ magnétique constant unitaire, alors on a quand  $h$  tend vers 0 l'asymptotique  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) \sim h\Theta_0$ , de plus les vecteurs propres associés à  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  se concentrent là où le champ magnétique est tangent au bord de  $\Omega$  quand  $h$  tend vers 0 (voir [HM96] par exemple). On se pose alors la question suivante : que se



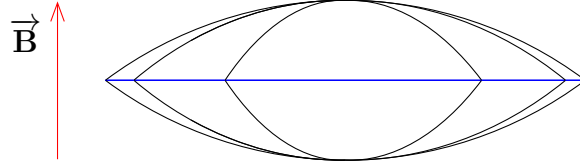


FIGURE 8.1 – Une lentille d’ouverture fixe soumise à un champ magnétique  $\mathbf{B}$  unitaire constant. Ici la lentille est composée de deux calottes sphériques accolées l’une à l’autre.

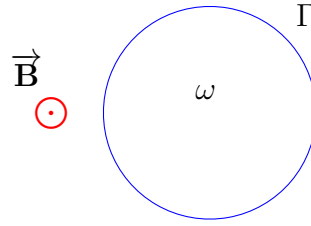


FIGURE 8.2 – L’intersection de la lentille et du plan  $\Pi := \{y_3 = 0\}$ . L’arête  $\Gamma$  délimite un domaine convexe  $\omega$  (ici un disque). Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est orthogonal à  $\omega$ .

passé-t-il si  $\Omega$  présente une “cassure” (autrement dit une arête courbe) de sorte que le champ magnétique n’est plus tangent au bord en aucun point de  $\partial\Omega$  ? Nous allons étudier ce problème pour un domaine  $\Omega$  de type “lentille” défini ci-dessous.

Nous notons  $(y_i)_{1 \leq i \leq 3}$  les coordonnées cartésiennes fixes. Une lentille est un ouvert borné convexe de  $\mathbb{R}^3$  possédant une arête  $\Gamma$  contenue dans le plan  $\Pi := \{y_3 = 0\}$ . La lentille est supposée régulière en dehors de l’arête. On fait l’hypothèse que  $\Gamma$  est une courbe fermée qui délimite dans le plan  $\Pi$  un ouvert  $\omega$  convexe régulier. Cet ouvert  $\omega$  coïncide avec  $\Omega \cap \Pi$  (voir la figure 8.2). Nous supposons aussi que  $\Omega$  est symétrique par rapport au plan  $\Pi$ . On peut penser pour  $\Omega$  à deux portions de sphère accolées l’une à l’autre (voir la figure 8.1). Nous faisons pour ce chapitre l’hypothèse que l’angle d’ouverture de la lentille est fixe, nous le notons  $\alpha \in (0, \pi)$ .

Soit  $y_0$  un point de l’arête  $\Gamma$ . Par définition d’une arête courbe il existe un voisinage de  $y_0$  qui est difféomorphe à un ouvert d’un dièdre droit d’angle  $\alpha$ . Nous notons  $(s, t, z)$  les coordonnées locales qui correspondent à ce difféomorphisme : la coordonnée  $s$  est une abscisse curviligne de l’arête  $\Gamma$ ,  $t$  est la distance du projeté dans  $\omega$  à l’arête et la coordonnée  $z$  est reliée la forme des parties supérieures et inférieures de la lentille (voir la figure 8.3). Nous notons  $\Psi^{\text{loc}} : (y_i) \mapsto (s, t, z)$  ce difféomorphisme. Nous remarquons que la différentielle de  $\Psi^{\text{loc}}$  au point  $y_0$  vaut l’identité :

$$d_{y_0} \Psi^{\text{loc}} = \text{Id} . \quad (8.1)$$

Cette lentille est soumise à un champ magnétique  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$  perpendiculaire à  $\omega$ . Pour un point  $y \in \partial\Omega \setminus \Gamma$  du bord régulier de la lentille, nous notons  $\beta(y)$  (cf. figure 8.4)

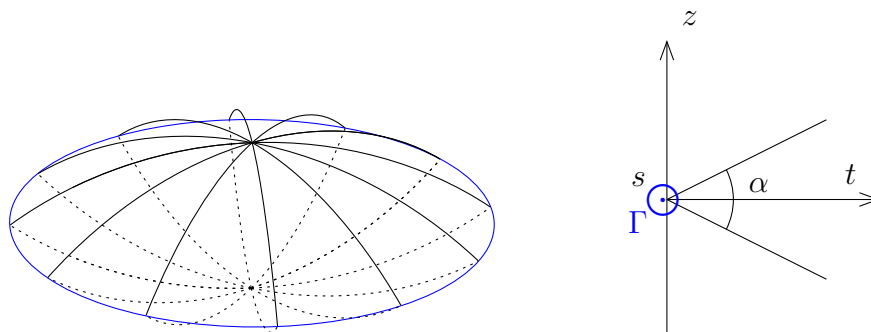


FIGURE 8.3 – La lentille d’ouverture fixe  $\alpha$ . A droite nous avons représenté un voisinage d’un point de l’arête dans les coordonnées locales  $(s, t, z)$ . Dans ces coordonnées, un voisinage d’un point de l’arête est un dièdre d’angle d’ouverture  $\alpha$ .

l’angle que fait le champ magnétique avec le bord de la lentille :

$$\sin \beta(y) = \mathbf{n}(y) \cdot \mathbf{B} \quad (8.2)$$

où  $\mathbf{n}(y)$  est la normale extérieure en un point  $y$  du bord de la lentille. Nous faisons l’hypothèse que l’angle que fait le champ magnétique avec le bord régulier de la lentille est toujours supérieur à l’angle que fait le champ magnétique avec le bord près de l’arête : on suppose que

$$\forall y \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad \beta(y) > \frac{\pi - \alpha}{2}. \quad (8.3)$$

Cette situation est illustrée sur la figure 8.4. Cette hypothèse est bien vérifiée pour une lentille formée de deux calottes sphériques accolées, et elle le reste pour une petite perturbation de cet ensemble.

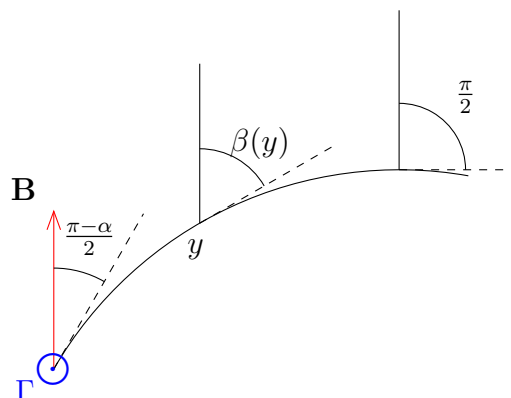


FIGURE 8.4 – Coupe transverse de la lentille. Illustration de l’angle entre le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et le bord de la lentille. Cet angle vaut  $\frac{\pi - \alpha}{2}$  près de l’arête  $\Gamma$  et  $\beta(y) \in (\frac{\pi - \alpha}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur un point  $y$  du bord régulier (cf. (8.2)).

Nous prenons comme potentiel magnétique

$$\mathbf{A}(y_1, y_2, y_3) := (0, y_1, 0)$$

qui vérifie bien  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . L'opérateur est alors

$$P_{\mathbf{A}, \Omega, h} = h^2 D_{y_1}^2 + (h D_{y_2} - y_1)^2 + h^2 D_{y_3}^2 .$$

Puisque le domaine  $\Omega$  est borné, cet opérateur est à résolvante compacte (voir [FH10]). Nous rappelons que nous avons noté  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  sa plus petite valeur propre (voir (3)). Nous cherchons à déterminer le comportement de  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  quand  $h$  tend vers 0. La forme quadratique associée à  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  est

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) := \int_{\Omega} h^2 |D_{y_1} u|^2 + |(h D_{y_2} - y_1) u|^2 + h^2 |D_{y_3} u|^2 dy$$

définie sur le domaine

$$\text{Dom}(q_{\mathbf{A}, \Omega, h}) := \{u \in L^2(\Omega), D_{y_1} u \in L^2(\Omega), (h D_{y_2} - y_1) u \in L^2(\Omega), D_{y_3} u \in L^2(\Omega)\} .$$

Puisque le domaine  $\Omega$  est borné, le potentiel magnétique est borné lui aussi et on a en fait

$$\text{Dom}(q_{\mathbf{A}, \Omega, h}) = H^1(\Omega) .$$

## 8.2 Coordonnées locales et minoration grossière

### 8.2.1 Formule de changement de variables pour la forme quadratique et le champ magnétique

Nous décrivons dans cette section l'effet d'un changement de variables dans la forme quadratique  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  pour un potentiel magnétique  $\mathbf{A}$  et un ouvert  $\Omega$  quelconques. Soit donc

$$\Phi : (x_i) \in \tilde{\Omega} \longmapsto (y_i) \in \Omega$$

un difféomorphisme. On note  $d\Phi$  la matrice jacobienne de  $\Phi$  et  $|d\Phi|$  son déterminant. On réalise le changement de variables associé à  $\Phi$  dans  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  :

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h} = \int_{\tilde{\Omega}} |(-ih(d\Phi^{-1})^t \nabla - \mathbf{A} \circ \Phi) u \circ \Phi|^2 |d\Phi| \quad (8.4)$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} |(d\Phi^{-1})^t (-ih \nabla - \tilde{\mathbf{A}}) \tilde{u}|^2 |d\Phi| \quad (8.5)$$

où l'on a introduit  $\tilde{u} = u \circ \Phi$  la fonction dans les nouvelles coordonnées et

$$\tilde{\mathbf{A}} := (d\Phi)^t \mathbf{A} \circ \Phi \quad (8.6)$$

le potentiel magnétique effectif dans les nouvelles coordonnées. On introduit la matrice qui donne la nouvelle métrique

$$G := d\Phi^{-1} (d\Phi^{-1})^t . \quad (8.7)$$

On a donc

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) = \langle G(-ih\nabla - \tilde{\mathbf{A}})\tilde{u}, (-ih\nabla - \tilde{\mathbf{A}})\tilde{u} \rangle_{L^2_{|G|^{-1/2}}(\tilde{\Omega})} . \quad (8.8)$$

On cherche le rotationnel dans les nouvelles coordonnées du potentiel magnétique effectif  $\tilde{\mathbf{A}}$ , autrement dit nous cherchons le nouveau champ magnétique. Nous notons  $(y_i)$  les coordonnées dans  $\Omega$  et  $(x_i)$  les coordonnées dans  $\tilde{\Omega}$ . On suit le raisonnement de [HM04, section 5.2] (voir aussi [Ray09a, Appendice D]). On représente le champ magnétique  $\mathbf{A}$  comme une 1-forme sur  $\Omega$  :

$$\mathbf{A} = f := A_1 dy_1 + A_2 dy_2 + A_3 dy_3 . \quad (8.9)$$

Dans les nouvelles coordonnées, on a

$$f = \tilde{A}_1 dx_1 + \tilde{A}_2 dx_2 + \tilde{A}_3 dx_3$$

où les  $dx_i$  se déduisent des  $dy_i$  par une formule de chaînette :

$$(dy_i)_i = (d\Phi)^t(dx_i)_i .$$

On utilise la formule de la dérivée extérieure :

$$df = \sum_{i < j} \left( \frac{\partial \tilde{A}_j}{\partial y_i} - \frac{\partial \tilde{A}_i}{\partial y_j} \right) dx_i \wedge dx_j .$$

On exprime les  $dx_i$  en fonction des  $dy_i$ , on identifie le champ magnétique avec  $df$  et on trouve

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{B}} \quad (8.10)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{B}} := |d\Phi| (d\Phi^{-1})^t \mathbf{B} . \quad (8.11)$$

## 8.2.2 Coordonnées locales près d'un point de l'arête

Comme plus haut nous notons  $y_0$  un point de l'arête  $\Gamma$  et  $V$  un petit voisinage de ce point dans  $\Omega$ . Nous avons noté  $\Psi^{\text{loc}}$  un difféomorphisme qui envoie  $V$  sur un ouvert du dièdre infini d'angle  $\alpha$  et d'axe la droite tangente à l'arête  $\Gamma$  au point  $y_0$ . Ce dièdre est transformé par une rotation d'axe  $\{y_3\}$  en le dièdre  $\{\hat{y} \in \mathbb{R}^3, \hat{y}_2 > 0, |\hat{y}_3| \leq \hat{y}_2 \tan \frac{\alpha}{2}\}$ . Nous notons  $R_{y_0}$  cette rotation qui laisse le champ magnétique  $\mathbf{B}$  invariant. Ce dièdre est finalement amené sur le dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  par la rotation  $R$  d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et d'axe  $\{y_2\}$ . Nous notons  $\Psi_V$  le difféomorphisme obtenu en composant ces différentes transformations et  $(x_i)$  les coordonnées locales de  $V$  :

$$\Psi_V : (y_i) \in V(y_0) \longmapsto (x_i) \in \mathcal{D}_\alpha . \quad (8.12)$$

Nous notons

$$W = \Psi_V(V)$$

l'ouvert du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  image de  $V$  par le difféomorphisme. Le point  $\Psi_V(y_0)$  est un point de l'arête du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ , de plus en utilisant (8.1), on constate que la différentielle de  $\Psi_V$  en  $y_0$  est une rotation :

$$d_{y_0} \Psi_V = R \circ R_{y_0} . \quad (8.13)$$

En vue d'appliquer la formule de changement de variables (8.8) avec  $\Phi = \Psi_V^{-1}$ , on introduit le potentiel magnétique résultant : en notant toujours  $x = \Psi_V(y)$ , on définit

$$\tilde{\mathbf{A}}(x) := ((d_y \Psi_V)^{-1})^t \mathbf{A}(y) . \quad (8.14)$$

On note  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}(x) := ((d_{y_0} \Psi_V)^{-1})^t \mathbf{A}(y)$  le potentiel magnétique dans les coordonnées locales au point  $\Psi_V(y_0)$ . Le champ magnétique dans les coordonnées locales au point  $y_0$  est noté  $\tilde{\mathbf{B}}$ , il est donné par (8.11). On trouve en utilisant (8.13) :

$$\tilde{\mathbf{B}} = (0, 1, 0) .$$

On a bien  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}} \in \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{B}})$  d'après (8.10). Le lemme suivant découle simplement de la régularité de  $\Psi_V$  et de la compacité de  $\Gamma$  :

**Lemme 8.1.** *Soit  $y_0 \in \Gamma$ . Pour  $\delta > 0$  on prend comme voisinage de  $y_0$  l'ouvert  $V = B(y_0, h^\delta)$  et on rappelle que  $W = \Psi_V(V)$ . Alors il existe  $C_1 > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $y_0 \in \Gamma$  et pour tout  $\delta > 0$  :*

$$\forall h \in (0, h_0), \quad \|\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}} - \tilde{\mathbf{A}}\|_{L^\infty(W)} \leq C_1 h^{2\delta} .$$

Le lemme suivant fait le lien entre l'opérateur  $(-ih\nabla - \mathbf{A})^2$  près d'un point de l'arête et l'opérateur  $P_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha}$  étudié dans les parties précédentes :

**Lemme 8.2.** *On note  $V = B(y_0, h^\delta)$  et  $W = \Psi_V(V)$ . Pour une fonction  $u$  définie sur  $V$  on note  $\tilde{u} := u \circ \Psi_V$  la fonction de  $W$  obtenue à partir du difféomorphisme  $\Psi_V$ . Il existe  $C > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $y_0 \in \Gamma$  et pour tout  $\delta > 0$  on a pour toute fonction  $u$  régulière à support dans  $V$  :*

$$\forall h \in (0, h_0), \quad (1 - Ch^\delta - Ch^{2\delta-1/2}) q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h}(\tilde{u}) - Ch^{2\delta+\frac{1}{2}} \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}^2 \leq q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) . \quad (8.15)$$

*Preuve :* On réalise dans la forme quadratique  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  le changement de variables associé au difféomorphisme  $\Psi_V$ . En utilisant (8.8), on a

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) = \int_{\mathcal{D}_\alpha} \sum_{i,j} g_{ij}(hD_{x_i} - \tilde{\mathbf{A}}_i) \tilde{u} \overline{(hD_{x_j} - \tilde{\mathbf{A}}_j) \tilde{u}} |G|^{-1/2} dx \quad (8.16)$$

où les  $g_{ij}$  sont les coefficients de la matrice  $G := d_y \Psi_V d_y \Psi_V^t$ , la fonction  $\tilde{u} := u \circ (\Psi_V)^{-1}$  étant la fonction  $u$  dans les nouvelles coordonnées et le potentiel résultant  $\tilde{\mathbf{A}}$  étant donné par (8.14). Le point  $\Psi_V(y_0)$  est un point de l'arête de  $\mathcal{D}_\alpha$ , de plus on a clairement  $G(y_0) = \text{Id}$ . On réalise un développement limité de la matrice  $G$  et du poids  $|G|^{-1/2}$  près du point  $y_0$  : il existe une constante  $c_2$  (qui dépend *a priori* de  $y_0$ ) telle que pour  $h \in (0, h_0)$  :

$$\forall x \in W, \quad |g_{ij}(x) - \delta_{ij}| \leq c_2 h^\delta \quad (8.17)$$

et

$$||G(x)|^{-1/2} - 1| \leq c_2 h^\delta. \quad (8.18)$$

On obtient l'existence d'une constante  $C_2$  telle que pour tout  $u$  à support dans  $V$  et pour tout  $h \in (0, h_0)$  :

$$(1 - C_2 h^\delta) q_{\tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{D}_{\alpha, h}}(\tilde{u}) \leq q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u). \quad (8.19)$$

On suit alors la preuve de [Bon05, proposition 11.4] dont nous donnons les grandes lignes. On a :

$$q_{\tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{D}_{\alpha, h}}(\tilde{u}) \geq q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_{\alpha, h}}(\tilde{u}) - 2 \sum_j \text{Im} \int_W (h D_{x_j} - \tilde{\mathbf{A}}_j^{\text{lin}}) \tilde{u} \overline{(\tilde{\mathbf{A}}_j - \tilde{\mathbf{A}}_j^{\text{lin}}) \tilde{u}} dx.$$

On utilise l'inégalité classique  $2|ab| \leq \eta a^2 + \frac{1}{\eta} b^2$  valable pour tout  $\eta > 0$ . On obtient en utilisant ceci et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$2 \left| \int_W (h D_{x_j} - \tilde{\mathbf{A}}_j^{\text{lin}}) \tilde{u} \overline{(\tilde{\mathbf{A}}_j - \tilde{\mathbf{A}}_j^{\text{lin}}) \tilde{u}} dx \right| \leq \eta \int_W \left| (h D_{x_j} - \tilde{\mathbf{A}}_j^{\text{lin}}) \tilde{u} \right|^2 dx + \eta^{-1} \int_W \left| (\tilde{\mathbf{A}}_j - \tilde{\mathbf{A}}_j^{\text{lin}}) \tilde{u} \right|^2 dx. \quad (8.20)$$

On trouve avec le lemme 8.1 :

$$q_{\tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{D}_{\alpha, h}}(\tilde{u}) \geq (1 - \eta) q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_{\alpha, h}}(\tilde{u}) - \eta^{-1} C_1 h^{4\delta} \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}^2.$$

On prend  $\eta = h^{2\delta-1/2}$  et on utilise (8.19) pour conclure.  $\square$

### 8.2.3 Comparaison des problèmes modèles

Le champ magnétique  $\tilde{\mathbf{B}} = (0, 1, 0)$  dans les coordonnées locales est orthogonal au plan bissecteur du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ . L'opérateur de Schrödinger associé  $P_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha}$  a été étudié dans les chapitres précédents. Nous avons vu que le bas de son spectre se déduit du bas du spectre de la famille d'opérateurs sur le secteur  $P_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{S}_\alpha} + (x_1 - \tau)^2$  avec  $\tau \in \mathbb{R}$ .

**Remarque 8.3.** Dans le cas particulier  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$  que nous étudions, le champ magnétique dans les coordonnées locales  $(x_i)$  est  $\tilde{\mathbf{B}} = (0, 1, 0)$  et on a  $(\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \tilde{a}_3)(x_1, x_2) = (0, 0, -x_1)$ . L'opérateur sur le secteur est alors

$$P_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{S}_\alpha} + (x_1 - \tau)^2 = -\Delta + (x_1 - \tau)^2.$$

Nous gardons cependant la notation  $P_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{S}_\alpha} + (x_1 - \tau)^2$  pour l'opérateur sur le secteur, en effet les démonstrations qui suivent sont encore valables pour d'autres champs magnétiques  $\mathbf{B}$  tels que  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}} \neq 0$ .

Pour abrégier les notations nous notons

$$\underline{\nu}(\alpha, \tau) := \underline{s}(\tilde{\mathbf{B}}; \alpha, \tau) \quad \text{et} \quad \nu(\alpha) := s(\tilde{\mathbf{B}}; \alpha) . \quad (8.21)$$

En vertu de (3.18), on a

$$\nu(\alpha) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{\nu}(\alpha, \tau) . \quad (8.22)$$

De plus il existe  $\alpha_m$  tel que pour  $\alpha \in (0, \alpha_m)$ , cet infimum est atteint. D'après (6.71) on a  $\alpha_m > 1.2035$ . On a calculé  $\nu(\alpha)$  par éléments finis dans le chapitre 6 (voir la figure 6.6). On minore l'énergie d'une fonction supportée près de l'arête par la valeur associée à ce problème modèle :

**Proposition 8.4.** *Nous gardons les mêmes notations que dans le lemme 8.2. Pour tout  $y_0 \in \Gamma$  et pour tout  $\delta > 0$  il existe des constantes  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  telles que pour toute fonction  $u$  à support dans  $V = B(y_0, h^\delta)$  on a :*

$$\forall h \in (0, h_0), \quad \left( h\nu(\alpha) - Ch^{\delta+1} - Ch^{2\delta+\frac{1}{2}} \right) \|u\|_{L^2(V)}^2 \leq q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) . \quad (8.23)$$

De plus ces constantes peuvent être choisies indépendamment de  $y_0$ .

*Preuve :* On sait que l'opérateur  $P_{\tilde{A}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h}$  est unitairement équivalent à l'opérateur  $hP_{\tilde{A}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha}$ . Nous déduisons directement du lemme 8.2 et du principe du min-max :

$$\forall h \in (0, h_0), \quad \left( h\nu(\alpha) - Ch^{\delta+1} - Ch^{2\delta+\frac{1}{2}} \right) \|\tilde{u}\|_{L^2(W)}^2 \leq q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) .$$

En utilisant (8.18) on obtient l'existence d'une constante  $c > 0$  telle pour  $\delta > 0$  on a pour toute fonction  $u$  régulière à support dans  $V$  :

$$\|\tilde{u}\|_{L^2_{|G|^{-1/2}}(W)}(1 - ch^\delta) \leq \|\tilde{u}\|_{L^2(W)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^2_{|G|^{-1/2}}(W)}(1 + ch^\delta) .$$

En utilisant la compacité de  $\Gamma$ , la constante  $c$  peut être obtenue uniformément par rapport à  $y_0$  (voir [HM04]). On conclut en utilisant  $\|u\|_{L^2(V)} = \|\tilde{u}\|_{L^2_{|G|^{-1/2}}(W)}$ .  $\square$

On a aussi des minoration pour des fonctions dont le support n'intersecte pas l'arête  $\Gamma$ . Dans le cas d'une fonction supportée à l'intérieur de la lentille on a la proposition suivante qui se déduit facilement de la proposition B.10 :

**Proposition 8.5.** *Il existe des constantes  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  telles que pour tout point  $y_0$  intérieur de  $\Omega$  et pour tout  $\delta > 0$ , on a pour toute fonction  $u$  à support dans  $V = B(y_0, h^\delta)$  :*

$$\forall h \in (0, h_0), \quad h\|u\|_{L^2(V)}^2 \leq q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) . \quad (8.24)$$

Dans le cas où la fonction  $u$  est supportée près du bord régulier de la lentille, on a la proposition suivante (voir par exemple [HM04, Proposition 7.2]) :

**Proposition 8.6.** *Pour un point  $y_0 \in \partial\Omega \setminus \Gamma$  du bord régulier de  $\Omega$ , on rappelle que  $\beta(y_0)$  est l'angle que fait le champ magnétique  $\mathbf{B}$  avec le bord de  $\Omega$  au point  $y_0$ . Pour tout  $\eta < \sigma_1(\beta(y_0))$  il existe des constantes  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  telles que pour tout  $y_0 \in \partial\Omega \setminus \Gamma$  et pour tout  $\delta > 0$  on a pour toute fonction  $u$  à support dans  $V := B(y_0, h^\delta)$  :*

$$\forall h \in (0, h_0), \quad h\eta\|u\|_{L^2(V)}^2 \leq q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) . \quad (8.25)$$

En utilisant l'hypothèse que pour tout  $y \in \partial\Omega \setminus \Gamma$  on a  $\beta(y) > \frac{\pi-\alpha}{2}$  (cf. figure 8.4) et la stricte croissance de la fonction  $\sigma_1$  sur  $(0, \frac{\pi}{2}]$  (voir la proposition 2.6), on déduit

$$\forall y \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad \sigma_1\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) < \sigma_1(\beta(y)). \quad (8.26)$$

Or on a d'après le théorème 5.4 et la relation (5.25) que

$$\liminf_{\tau \rightarrow \pm\infty} \underline{\nu}(\alpha, \tau) = \sigma_1\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right).$$

Ainsi en utilisant le théorème 6.35, on obtient pour un angle d'ouverture  $\alpha \in (0, \alpha_m)$  :

$$\forall y \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad \nu(\alpha) < \sigma_1\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) < \sigma(\beta(y)). \quad (8.27)$$

### 8.2.4 Minoration

La comparaison des problèmes modèles associés aux différentes géométries de la lentille va permettre de donner une minoration du bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  pour  $h$  assez petit. On obtient la minoration suivante :

**Proposition 8.7.** *Soit  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$  le champ magnétique et  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{B})$  un potentiel magnétique associé. Soit  $\Omega$  une lentille qui vérifie (8.3). On suppose que l'angle d'ouverture  $\alpha$  de la lentille vérifie  $\alpha \in (0, \alpha_m(\mathbf{B}))$  où  $\alpha_m(\mathbf{B})$  est défini en (6.69). Soit  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  la première valeur propre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  sur la lentille  $\Omega$ . On a l'existence de  $h_0 > 0$  et d'une constante  $C_0$  tels que*

$$\forall h \in (0, h_0), \quad \lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) \geq h\nu(\alpha) - C_0 h^{5/4}. \quad (8.28)$$

*Preuve :* Comme dans [HM04, Section 7.2], nous réalisons un recouvrement de la lentille  $\Omega$  en boules de taille  $h^\delta$  avec  $\delta > 0$  et de centre  $(y_{j,h})_j$ . Nous notons  $(\chi_{j,h})_j$  une partition régulière de l'unité associée, et nous supposons que cette partition vérifie

$$\sum_j \chi_{j,h}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_j |\nabla \chi_{j,h}|^2 \leq Ch^{-2\delta}$$

où  $C > 0$  est une constante. La formule IMS (B.8) s'adapte au cas semi-classique et fournit pour une fonction  $u \in H^1(\Omega)$  :

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) = \sum_j q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(\chi_{j,h}u) - h^2 \sum_j \|\nabla \chi_{j,h}u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (8.29)$$

On utilise les propositions 8.5, 8.6 et 8.4 pour minorer  $q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(\chi_{j,h}u)$  selon que le support de  $\chi_{j,h}$  est à l'intérieur de  $\Omega$ , intersecte le bord régulier de  $\Omega$  ou l'arête  $\Gamma$ . On obtient grâce à (8.29) et (8.27) l'existence de constantes  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  telles que  $\forall u \in H^1(\Omega)$  on a :

$$\forall h \in (0, h_0), \quad q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u) \geq (h\nu(\alpha) - Ch^{\delta+1} - Ch^{2\delta+1/2} - Ch^{2-2\delta}) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (8.30)$$

Nous optimisons cette estimation en prenant  $2 - 2\delta = \frac{1}{2} + 2\delta$ , soit  $\delta = \frac{3}{8}$ , et nous obtenons (8.28) en utilisant le principe du min-max.  $\square$



### 8.3 Construction de quasi-modes et asymptotique

On suppose dans la suite que  $\alpha \in (0, \alpha_m)$  où  $\alpha_m$  est défini en (6.69). Ainsi d'après le théorème 6.35, il existe  $\tau_*$  tel que

$$\nu(\alpha) = \underline{\nu}(\alpha, \tau_*) .$$

D'après la proposition 4.10, l'opérateur  $P_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{S}_\alpha} + (x_1 - \tau_*)^2$  est à résolvante compacte pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et pour tout  $\alpha \in (0, \pi)$ , il existe donc un vecteur propre associé au bas du spectre  $\nu(\alpha)$  pour l'opérateur  $P_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{S}_\alpha} + (x_1 - \tau_*)^2$ .

**Définition 8.8.** Nous notons  $q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{S}_\alpha} + V_{\tau_*}$  la forme quadratique associée à  $P_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{S}_\alpha} + (x_1 - \tau_*)^2$  et nous notons  $u^{\mathcal{S}_\alpha}$  un vecteur propre normalisé pour  $P_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{S}_\alpha} + (x_1 - \tau_*)^2$  associé à  $\nu(\alpha)$ .

Puisque  $\mathcal{S}_\alpha$  est convexe, la fonction propre  $u^{\mathcal{S}_\alpha}$  est dans  $H_{\text{loc}}^2(\overline{\mathcal{S}_\alpha})$  (cf. [Gri76]). Nous allons construire un quasi-mode pour l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  à partir de  $u^{\mathcal{S}_\alpha}$ . Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  à support dans  $(-2, 2)$  et valant 1 sur  $(-1, 1)$ . On a

$$\exists K > 0, \forall r \in \mathbb{R}, \quad |\nabla \chi(r)|^2 \leq K . \quad (8.31)$$

Soit  $\delta > 0$  un réel vérifiant

$$\delta \in (0, \frac{1}{2}) . \quad (8.32)$$

Dans la suite nous notons génériquement  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}_\alpha$  et  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , ainsi que  $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha$ . Nous définissons sur le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  la fonction  $u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}$  concentrée à l'échelle  $h^{1/2}$  près de l'origine puis tronquée à l'infini :

$$u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}(x_1, x_2) = h^{-1/2} u^{\mathcal{S}_\alpha}(h^{-1/2} x_1, h^{-1/2} x_2) \chi \left( h^{-\delta} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) ,$$

le terme  $h^{-1/2}$  étant un terme de normalisation. On construit ensuite une fonction sur le dièdre à partir de la fonction  $u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}(x_1, x_2)$  en multipliant par une troncature dans la variable  $x_3$  localisée dans un voisinage de taille  $\delta$  de l'origine :

$$u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{cut}}(x_1, x_2, x_3) = h^{-\delta} \chi(h^{-\delta} x_3) u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}(x_1, x_2) , \quad (8.33)$$

le terme  $h^{-\delta}$  étant encore un terme de normalisation. On précise la norme des fonctions construites :

**Lemme 8.9.** On a

$$\|u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2 = 1 + O(h^\infty)$$

et

$$\|u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{cut}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)}^2 = \|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 + O(h^\infty)) . \quad (8.34)$$

*Preuve :* On a

$$\begin{aligned} \|u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2 &= h^{-1} \int_{\mathcal{S}_\alpha \cap \{|\underline{x}| \leq 2h^\delta\}} |\chi(|\underline{x}|h^{-\delta})u^{\mathcal{S}_\alpha}(\underline{x}h^{-1/2})|^2 d\underline{x} \\ &= h^{-1} \int_{\mathcal{S}_\alpha \cap \{|\underline{X}| \leq h^{\delta-1/2}\}} |\chi(|\underline{X}|h^{1/2-\delta})u^{\mathcal{S}_\alpha}(X)|^2 d\underline{X} \\ &= 1 + O(h^\infty), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la décroissance exponentielle à l'infini du vecteur propre normé  $u^{\mathcal{S}_\alpha}$ , cf. la proposition 4.22, et du choix  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ . On déduit du théorème de Fubini (8.34).  $\square$

On rappelle la notation  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}} = (\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \tilde{a}_3^{\text{lin}})$ . Puisque  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}} \in \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{B}})$  (cf. la définition 3.2), il existe  $\Phi \in H^1(\mathcal{D}_\alpha)$  tel que

$$(\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \tilde{a}_3^{\text{lin}}) - (\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, x_1 - \tau_* h^{1/2}) = \nabla \Phi.$$

On multiplie  $u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{cut}}$  par  $e^{-i\Phi h^{-1}}$  afin de réaliser le changement de jauge  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}} \mapsto (\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, x_1 - h^{1/2}\tau_*)$ . Le quasi-mode sur le dièdre est défini comme la fonction  $u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}$  avec :

$$u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}} := e^{-i\Phi h^{-1}} u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{cut}}. \quad (8.35)$$

On a d'après le lemme précédent

$$\|u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)}^2 = \|u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{cut}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)}^2 = \|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (1 + O(h^\infty)).$$

On évalue l'énergie du quasi-mode sur le dièdre :

**Lemme 8.10.**

$$(q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h} + V_{\tau_*}) (u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}) = (h\nu(\alpha) + O(h^{2-2\delta})) \|u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)}^2 \quad (8.36)$$

*Preuve :* On a par une formule IMS

$$\begin{aligned} (q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h} + V_{\tau_*}) (u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}) &= h\nu(\alpha) \|u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2 \\ &\quad + h^2 h^{-1} \int_{\mathcal{S}_\alpha \cap \{|\underline{x}| \geq h^\delta\}} |h^{-2\delta} \nabla \chi(|\underline{x}|h^{-\delta}) u^{\mathcal{S}_\alpha}(\underline{x}h^{-1/2})|^2 d\underline{x}. \end{aligned}$$

Or on a grâce à (8.31) :

$$h^{-1} \left| \int_{\mathcal{S}_\alpha \cap \{|\underline{x}| \geq h^\delta\}} |\nabla \chi(|\underline{x}|h^{-\delta}) u^{\mathcal{S}_\alpha}(\underline{x}h^{-1/2})|^2 d\underline{x} \right| \leq K \int_{\mathcal{S}_\alpha \cap \{|\underline{X}| \geq h^{\delta-1/2}\}} |u^{\mathcal{S}_\alpha}(X)|^2 d\underline{X} = O(h^\infty).$$

On a donc

$$(q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h} + V_{\tau_*}) (u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}) = h\nu(\alpha) + O(h^\infty).$$

Par définition de la jauge  $\Phi$  on a grâce à la proposition **B.2** :

$$\begin{aligned}
q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h} \left( u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}} \right) &= \int_{\mathcal{D}_\alpha} \left| (hD_{x_1} - \tilde{a}_1^{\text{lin}}) u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{cut}} \right|^2 + \left| (hD_{x_2} - \tilde{a}_2^{\text{lin}}) u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{cut}} \right|^2 \\
&\quad + \left| (hD_{x_3} - x_1 + h^{1/2} \tau_*) u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{cut}} \right|^2 dx \\
&= h^{-\delta} (q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h} + V_{\tau_*}) (u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}) \int_{\mathbb{R}} |\chi(x_3 h^{-\delta})|^2 dx_3 \\
&\quad + h^{2-2\delta} h^{-\delta} \|u_h^{\mathcal{S}_\alpha, \text{cut}}\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2 \int_{|x_3| \geq h^\delta} |\nabla \chi(x_3 h^{-\delta})|^2 dx_3 \\
&= \|\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 (h\nu(\alpha) + O(h^\infty)) + O(h^{2-2\delta}) \\
&= (h\nu(\alpha) + O(h^\infty)) \left( \|u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)}^2 + O(h^\infty) \right) + O(h^{2-2\delta}),
\end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de (8.34).  $\square$

Nous définissons maintenant le quasi-mode sur la lentille  $\Omega$  à partir du quasi-mode construit sur le dièdre. On fixe  $y_0 \in \Gamma$  et on rappelle que pour  $V = B(y_0, h^\delta)$ , le difféomorphisme  $\Psi_V$  envoie  $V$  sur un ouvert du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ . On définit la fonction

$$u_h^{\Omega, \text{qm}}(y) := u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}(\Psi_V(y)). \quad (8.37)$$

On a  $u_h^{\Omega, \text{qm}} \in H^1(\Omega)$  et en utilisant (8.18) on obtient

$$\|u_h^{\Omega, \text{qm}}\|_{L^2(\Omega)} = (1 + O(h^\delta)) \|u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)}^2. \quad (8.38)$$

**Proposition 8.11.** Soit  $u^{\Omega, \text{qm}}$  défini en (8.37). On a

$$\frac{q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u_h^{\Omega, \text{qm}})}{\|u_h^{\Omega, \text{qm}}\|_{L^2(\Omega)}^2} \leq h\nu(\alpha) + O(h^{5/4}). \quad (8.39)$$

*Preuve :* On utilise à nouveau la formule de changement de variables (8.8) :

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u_h^{\Omega, \text{qm}}) \leq q_{\tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{D}_\alpha, h}(u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}})(1 + C_0 h^\delta). \quad (8.40)$$

On suit la procédure de [HM04, Section 6] (voir aussi la preuve du lemme 8.2) : on remplace  $\tilde{\mathbf{A}}$  par  $\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}$ , on utilise l'inégalité Cauchy-Schwarz et on obtient :

$$\begin{aligned}
q_{\tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{D}_\alpha, h}(u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}) &\leq q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h}(u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}) \\
&+ 2 \left( q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h}(u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}) \right)^{1/2} \|(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}) u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)} + \|(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}) u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)}^2.
\end{aligned} \quad (8.41)$$

D'après le lemme 8.1, on obtient l'existence de constantes  $C_2 > 0$  et  $C_3 > 0$  telles que

$$\begin{aligned}
q_{\tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{D}_\alpha, h}(u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}) &\leq q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h}(u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}) \\
&+ C_2 h^{2\delta} \left( q_{\tilde{\mathbf{A}}^{\text{lin}}, \mathcal{D}_\alpha, h}(u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}) \right)^{1/2} \|u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)} + C_3 h^{4\delta} \|u_h^{\mathcal{D}_\alpha, \text{qm}}\|_{L^2(\mathcal{D}_\alpha)}^2.
\end{aligned} \quad (8.42)$$

En utilisant (8.36) (8.38), (8.40), on obtient une constante  $C > 0$  telle que

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u_h^{\Omega, \text{qm}}) \leq (h\nu(\alpha) + Ch^{\delta+1} + Ch^{2\delta+1/2} + Ch^{4\delta} + Ch^{2-2\delta}) \|u_h^{\Omega, \text{qm}}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En prenant  $\delta = \frac{3}{8}$  on obtient (8.39).  $\square$

En utilisant la proposition 8.11 le principe du min-max et la proposition 8.7, on déduit l'asymptotique du bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique pour une lentille :

**Théorème 8.12.** *Soit  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$  le champ magnétique et  $\mathbf{A}$  un potentiel magnétique vérifiant  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Soit  $\Omega$  une lentille qui vérifie (8.3). On suppose que l'angle d'ouverture  $\alpha$  de la lentille vérifie  $\alpha \in (0, \alpha_m(\mathbf{B}))$  où  $\alpha_m(\mathbf{B})$  est défini en (6.69). Soit  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  le bas du spectre de l'opérateur  $P_{\mathbf{A}, \Omega, h}$  sur la lentille  $\Omega$ . On a le développement asymptotique suivant lorsque  $h$  tend vers 0 :*

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = h\nu(\alpha) + O(h^{5/4}). \quad (8.43)$$

Nous comparons ces résultats à ceux obtenus par Helffer et Morame dans [HM96] puis [HM04]. Pour un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  régulier, on a  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = h\Theta_0 + O(h^{4/3})$ . De plus les vecteurs propres associés se concentrent le long des points où le champ magnétique est tangent au bord de  $\Omega$ .

La proposition suivante permet de comparer l'asymptotique (8.43) à celle connue pour le cas régulier :

**Proposition 8.13.** *On a*

$$\forall \alpha \in (0, \pi), \quad \Theta_0 < \nu(\alpha).$$

*Preuve :* L'opérateur associé à  $\nu(\alpha)$  est la réalisation de Neumann  $-\Delta + (x_1 - \tau_*)^2$  sur le secteur  $\mathcal{S}_\alpha$  et la forme quadratique associée est notée

$$\mathcal{Q}_\alpha := u \mapsto \int_{\mathcal{S}_\alpha} |\nabla u|^2 + (x_1 - \tau)|u|^2 dx_1 dx_2.$$

On a pour  $u \in \text{Dom}(\mathcal{Q}_\alpha)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\alpha(u) &\geq \|\partial_{x_2} u\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2 + \int_{x_2 \in \mathbb{R}} \left( \int_{\cot \frac{\alpha}{2} |x_2| < x_1} |\partial_{x_1} u|^2 + (x_1 - \tau_*)^2 |u|^2 dx_1 \right) dx_2 \\ &\geq \|\partial_{x_2} u\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2 + \Theta_0 \|u\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi si  $\nu(\alpha) = \Theta_0$ , en notant  $u_\alpha$  un vecteur propre associé pour l'opérateur  $-\Delta + (x_1 - \tau_*)^2$ , on a  $\|\partial_{x_2} u_\alpha\|_{L^2(\mathcal{S}_\alpha)}^2 = 0$  et la fonction  $u_\alpha$  n'est pas dans  $L^2(\mathcal{S}_\alpha)$ . C'est une contradiction.  $\square$

Lorsque  $\Omega$  est une lentille qui vérifie les hypothèses écrites au théorème 8.43, le champ magnétique n'est tangent en aucun point du bord de  $\Omega$ . On a vu que la valeur propre  $\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h)$  se comporte comme  $h\nu(\alpha)$  quand  $h$  tend vers 0. Or on a montré dans la proposition précédente  $\forall \alpha \in (0, \pi)$ ,  $\nu(\alpha) > \Theta_0$ . Ainsi la première valeur propre de l'opérateur

de Schrödinger pour une lentille soumise au champ magnétique  $(0, 0, 1)$  est plus élevée que pour un ouvert régulier (cf. le théorème 0.3). Il est possible en utilisant directement les techniques de [HM01] de démontrer que les vecteurs propres se concentrent près de l'arête courbe quand  $h$  tend vers 0. Nous ne pouvons pas prouver de localisation plus précise sans hypothèse supplémentaire sur la géométrie de  $\Omega$ .

## 8.4 Lentille d'angle variable

La proposition suivante est issue de [PR12] :

**Proposition 8.14.** *La fonction  $\alpha \mapsto \nu(\alpha)$  est décroissante sur  $(0, \pi)$ .*

*Preuve :* Nous notons  $\underline{\nu}(\alpha, \tau)$  la première valeur propre de l'opérateur

$$-\Delta + (x_1 - \tau)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_\alpha.$$

En utilisant le changement d'échelle  $X_2 = x_2 \cot \frac{\alpha}{2}$ , cet opérateur est unitairement à la réalisation de Neumann de

$$-\partial_{x_1}^2 - \cot \frac{\alpha}{2} \partial_{x_2}^2 + (x_1 - \tau)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{S}_{\frac{\pi}{2}}.$$

On note

$$\mathcal{Q}_{\tau, \alpha}^{\text{norm}} : u \mapsto \int_{\mathcal{S}_{\frac{\pi}{2}}} |\partial_{x_1} u|^2 + \cot \frac{\alpha}{2} |\partial_{x_2} u|^2 + (x_1 - \tau)^2 |u|^2 dx_1 dx_2$$

la forme quadratique associée à cet opérateur. Elle est définie sur

$$\{u \in H^1(\mathcal{S}_{\frac{\pi}{2}}), x_1 u \in L^2(\mathcal{S}_{\frac{\pi}{2}})\}.$$

Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et pour tout  $u$  dans le domaine de forme,  $\alpha \mapsto \mathcal{Q}_{\tau, \alpha}^{\text{norm}}(u)$  est décroissante sur  $(0, \pi)$ . On déduit du principe du min-max que  $\alpha \mapsto \underline{\nu}(\alpha, \tau)$  est décroissant sur  $(0, \pi)$ . En utilisant  $\nu(\alpha) = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \underline{\nu}(\alpha, \tau)$ , on obtient la proposition.  $\square$

Nous supposons désormais que l'angle d'ouverture de la lentille est variable. En notant  $s \in I \mapsto y(s)$  une abscisse curviligne qui permet de paramétrer  $\Gamma$ , on définit  $\alpha(s)$  l'angle d'ouverture au point  $y(s)$ . On fait l'hypothèse que  $s \mapsto \alpha(s)$  est une fonction régulière qui atteint un unique maximum en  $s = 0$ . On note  $\alpha_0$  la valeur de ce maximum. D'après la proposition précédente, on a  $\nu(\alpha_0) \leq \nu(\alpha(s))$  pour tout  $s$ . On rappelle que l'on note  $\beta(y)$  l'angle que fait le champ magnétique  $\mathbf{B}$  avec le bord régulier de la lentille au point  $y$ . On fait l'hypothèse générique suivante, qui est vérifiée pour une petite perturbation de la lentille d'angle fixe présentée dans la section 8.1 :

$$\nu(\alpha_0) < \inf_{y \in \partial\Omega \setminus \Gamma} \sigma_1(\beta(y)) \quad (8.44)$$

On a alors (voir aussi [PR12]) :

**Théorème 8.15.** Soit  $\Omega$  une lentille soumise au champ magnétique  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ . Soit  $s \in I \mapsto y(s)$  une paramétrisation de l'arête et  $\alpha(s)$  l'angle d'ouverture au point  $y(s)$ . On suppose que  $\alpha(s)$  est régulière et admet un maximum  $\alpha_0$  au point  $s = 0$ . On suppose que

$$\nu(\alpha_0) < \inf_{y \in \partial\Omega \setminus \Gamma} \sigma_1(\beta(y)) .$$

Alors on a l'asymptotique suivante lorsque  $h$  tend vers 0 :

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = h\nu(\alpha_0) + O(h^{5/4}) .$$

*Preuve :* D'après la proposition 8.14 et les hypothèses on a

$$\nu(\alpha_0) = \inf_{s \in I} \nu(\alpha(s)) < \inf_{y \in \partial\Omega \setminus \Gamma} \sigma_1(\beta(y)) . \quad (8.45)$$

Soit  $s \in I$  fixé,  $y(s)$  le point de l'arête  $\Gamma$  associé et  $V$  un petit voisinage de  $y(s)$  dans  $\Omega$ . Il existe un difféomorphisme qui envoie ce voisinage sur un ouvert du dièdre  $\mathcal{D}_{\alpha(s)}$  et qui vérifie la propriété (8.13). On prouve la minoration de la proposition 8.7 en utilisant ce difféomorphisme et l'inégalité (8.45). On construit un quasi-mode près du point  $y(0)$  où l'angle d'ouverture est maximal. Pour cela, on utilise encore un vecteur propre associé à la valeur propre  $\nu(\alpha_0) = \nu(\alpha_0, \tau_*)$  pour l'opérateur sur le secteur  $-\Delta + (x_1 - \tau_*)^2$ . Le reste de la preuve est identique celle du théorème 8.12.  $\square$

**Remarque 8.16.** Sous l'hypothèse que  $\tau \mapsto \nu(\alpha_0, \tau)$  admet un unique minimum non dégénéré sur  $\mathbb{R}$  et que le maximum de  $s \mapsto \alpha(s)$  est unique et non dégénéré, on démontre dans [PR12] un développement à tout ordre en puissance de  $h$  de  $\lambda(\mathbf{B}; \alpha, h)$ . On a en particulier

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = h\nu(\alpha_0) + C(\Omega)h^{3/2} + O(h^{7/4}) ,$$

où  $C(\Omega) > 0$  est une constante qui dépend de la géométrie de la lentille. De plus les vecteurs propres associés se concentrent près du point de l'arête où l'ouverture est maximale.

## 8.5 Champ magnétique contenu dans le plan de l'arête

On suppose maintenant que le champ magnétique est tangent au plan  $\Pi$  dans lequel est contenu l'arête  $\Gamma$ . On rappelle que pour un point  $y$  de  $\Gamma$ , le difféomorphisme  $\Psi_V$  envoie un petit voisinage de  $y$  dans le dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ . Le champ magnétique dans les coordonnées locales donné par la formule (8.11) dépend maintenant du point  $y$ , on le note  $\tilde{\mathbf{B}}(y)$ . On remarque qu'il est contenu dans le plan bissecteur du dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$  : si on note  $\gamma$  l'angle que fait le champ magnétique  $\mathbf{B}$  avec l'arête  $\Gamma$  au point  $y_0$ , on a

$$\tilde{\mathbf{B}}(y) = (\sin \gamma, 0, \cos \gamma) .$$

Ainsi la valeur propre associée au problème local au voisinage d'un point  $y$  de l'arête est  $s(\gamma, \frac{\pi}{2}; \alpha)$ . On introduit la quantité

$$\kappa^{\min}(\alpha) := \min_{\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]} s(\gamma, \frac{\pi}{2}, \alpha) .$$

**Théorème 8.17.** *Soit  $\Omega$  une lentille d'angle d'ouverture  $\alpha \in (0, \pi)$  fixe. On suppose que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est contenu dans le plan  $\Pi$ . Alors on a pour  $\alpha$  suffisamment petit :*

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = \kappa^{\min}(\alpha)h + O(h^{5/4}) . \quad (8.46)$$

*Preuve :* Le champ magnétique est cette fois-ci tangent au bord régulier de la lentille en un ensemble de points non vide et le problème spectral modèle associé à ces points a comme bas du spectre  $\Theta_0$ . On reprend la proposition 8.6 en prenant  $\eta < \Theta_0$ . Or on a démontré que pour  $\alpha \in (0, 0.9972)$  on a  $s(\gamma, \frac{\pi}{2}; \alpha) < \Theta_0$  pour tout  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Ainsi pour  $\alpha < 0.9972$ , on a  $\kappa^{\min}(\alpha) < \Theta_0$ . On déduit une minoration similaire à celle de la proposition 8.7. Pour la construction de quasi-mode, nous prenons un point  $y_0 \in \Gamma$  tel que  $s(\tilde{\mathbf{B}}(y_0); \alpha) = \kappa^{\min}(\alpha)$ . Un tel point existe d'après la proposition 3.39. On construit en suivant la procédure de la section 8.3 une fonction  $u_h$  supportée près de  $y_0$  et vérifiant

$$q_{\mathbf{A}, \Omega, h}(u_h) \leq \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 (h\kappa^{\min}(\alpha) + O(h^{5/4})) .$$

On déduit le théorème du principe du min-max.  $\square$

**Remarque 8.18.** Si la conjecture 7.5 est vraie alors on déduit de l'asymptotique (7.38) que pour  $\alpha$  assez petit, on a  $\kappa^{\min}(\alpha) = \mu(\alpha)$ . Dans ces conditions l'asymptotique (8.46) peut être remplacée par  $\lambda(\mathbf{B}; \alpha, h) = h\mu(\alpha) + O(h^{5/4})$  et les vecteurs propres associés se concentrent là où le champ magnétique est tangent à l'arête.

## 8.6 Enoncé du résultat dans un cadre plus général

Nous avons vu dans la section précédente que la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant sur un domaine possédant une arête courbe peut être inférieure à l'asymptotique (14) connue pour le cas régulier. Nous donnons dans cette section une condition générique sur le champ magnétique  $\mathbf{B}$  pour que ceci reste vraie. La démonstration est identique à celle du théorème 8.17, c'est pourquoi nous nous contentons d'énoncer le résultat.

Soit  $\Omega$  une lentille d'ouverture fixée  $\alpha \in (0, \pi)$  et  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant unitaire. Pour un point  $y$  de l'arête  $\Gamma$  et un petit voisinage  $V$  de  $y$  dans  $\Omega$ , on note  $\Psi_V$  le difféomorphisme qui envoie  $V$  sur un ouvert de  $\mathcal{D}_\alpha$ . On définit  $\tilde{\mathbf{B}}(y) := (d_y \Psi_V)^t \mathbf{B}$  le champ magnétique dans les coordonnées locales (cf. (8.11)) et on rappelle que la quantité  $s(\tilde{\mathbf{B}}(y); \alpha)$  est le bas du spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant  $\tilde{\mathbf{B}}(y)$  sur le dièdre  $\mathcal{D}_\alpha$ . On introduit :

$$s^{\min}(\mathbf{B}; \alpha) := \inf_{y \in \Gamma} (s(\tilde{\mathbf{B}}(y); \alpha)) .$$

**Théorème 8.19.** *Soit  $\Omega$  une lentille d'ouverture  $\alpha \in (0, \pi)$  constante et  $\mathbf{B}$  un champ magnétique constant uniforme. Si la condition  $s^{\min}(\mathbf{B}; \alpha) < \Theta_0$  est vérifiée, on a quand  $h$  tend vers 0 :*

$$\lambda(\mathbf{B}; \Omega, h) = s^{\min}(\mathbf{B}; \alpha)h + O(h^{5/4}) . \quad (8.47)$$

Si on note  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$  et  $\tilde{\mathbf{B}}(y) = (\tilde{b}_1(y), \tilde{b}_2(y), \tilde{b}_3(y))$ , alors on remarque en utilisant (8.13) que  $\tilde{b}_2(y) = b_3$  pour tout  $y \in \Gamma$ . Ainsi on déduit du théorème 6.33 que la condition  $s^{\min}(\mathbf{B}; \alpha) < \Theta_0$  est vérifiée dès que  $\alpha$  et  $b_3$  sont assez petits.





# Bibliographie

- [ABN06] François Alouges and Virginie BONNAILLIE-NOËL. Numerical computations of fundamental eigenstates for the Schrödinger operator under constant magnetic field. *Numerical Methods for PDE*, 22(5) :1090–1105, 2006.
- [Ada75] Robert Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [Agm82] Shmuel Agmon. *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations : bounds on eigenfunctions of  $N$ -body Schrödinger operators*, volume 29 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1982.
- [Agm85] Shmuel Agmon. *Bounds on exponential decay of eigenfunctions of Schrödinger operators*, volume 1159 of *Lecture Notes in Math*. Springer, Berlin, 1985.
- [AS64] Milton Abramowitz and Irene Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.
- [BC72] Pierre Bolley and Jacques Camus. Sur une classe d’opérateurs elliptiques et dégénérés à une variable. *J. Math. Pures Appl.* (9), 51 :429–463, 1972.
- [BDFM99] Fons Brosens, Joseph Devreese, Vasily Mikhailovich Fomin, and Victor Moshchalkov. Superconductivity in a wedge : analytical variational results. *Solid State Communications*, 111(10) :565 – 569, 1999.
- [BH93] Catherine Bolley and Bernard Helffer. An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 58(2) :189–233, 1993.
- [BN12] Virginie BONNAILLIE-NOËL. Numerical estimates of characteristic parameters  $\theta_0$  and  $\phi(0)$  for superconductivity. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 11(6) :2221–2237, 2012.
- [BND06] Virginie BONNAILLIE-NOËL and Monique Dauge. Asymptotics for the low-lying eigenstates of the Schrödinger operator with magnetic field near corners. *Ann. Henri Poincaré*, 7 :899–931, 2006.

- [BNDMV07] Virginie Bonnaillie-Noël, Monique Dauge, Daniel Martin, and Gregory Vial. Computations of the first eigenpairs for the Schrödinger operator with magnetic field. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(37-40) :3841–3858, 2007.
- [BNDPR12] Virginie Bonnaillie-Noël, Monique Dauge, Nicolas Popoff, and Nicolas Raymond. Discrete spectrum of a model Schrödinger operator on the half-plane with Neumann conditions. *ZAMP*, 63(2) :203–231, 2012.
- [BNF07] Virginie Bonnaillie-Noël and Soeren Fournais. Superconductivity in domains with corners. *Rev. Math. Phys.*, 19(6) :607–637, 2007.
- [Bol92] Catherine Bolley. Modélisation du champ de retard à la condensation d’un supraconducteur par un problème de bifurcation. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 26(2) :235–287, 1992.
- [Bon03a] Virginie Bonnaillie. *Analyse mathématique de la supraconductivité dans un domaine à coins ; méthodes semi-classiques et numériques*. Thèse de doctorat, Université Paris XI - Orsay, 2003.
- [Bon03b] Virginie Bonnaillie. On the fundamental state for a Schrödinger operator with magnetic field in a domain with corners. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(2) :135–140, 2003.
- [Bon05] Virginie Bonnaillie. On the fundamental state energy for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners. *Asymptot. Anal.*, 41(3-4) :215–258, 2005.
- [BS98] Andrew Bernoff and Peter Sternberg. Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. *J. Math. Phys.*, 39(3) :1272–1284, 1998.
- [CDFK05] Boris Chenaud, Pierre Duclos, Pedro Freitas, and David Krejčířík. Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes. *Differential Geom. Appl.*, 23(2) :95–105, 2005.
- [CDS83] Jean-Michel Combes, Pierre Duclos, and Ruedi Seiler. Krein’s formula and one-dimensional multiple-well. *J. Funct. Anal.*, 52(2) :257–301, 1983.
- [CdV84] Yves Colin de Verdière. Opérateur de Schrödinger pour un champ magnétique constant sur l’espace euclidien à deux dimensions. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Année 1983–1984*, pages III.1–III.5. Univ. Grenoble I, Saint, 1984.
- [CFKS87] Hans Cycon, Rrichard Froese, Werner Kirsch, and Barry Simon. *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, study edition, 1987.
- [CH53] Richard Courant and David Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. I*. Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.
- [Cha94] S. Jon Chapman. Nucleation of superconductivity in decreasing fields. I, II. *European J. Appl. Math.*, 5(4) :449–468, 469–494, 1994.
- [DE95] Pierre Duclos and Pavel Exner. Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions. *Rev. Math. Phys.*, 7(1) :73–102, 1995.

- [DH93a] Monique Dauge and Bernard Helffer. Eigenvalues variation. I. Neumann problem for Sturm-Liouville operators. *J. Differential Equations*, 104(2) :243–262, 1993.
- [DH93b] Monique Dauge and Bernard Helffer. Eigenvalues variation. II. Multidimensional problems. *J. Differential Equations*, 104(2) :263–297, 1993.
- [DPFS00] Manuel Del Pino, Patricio Felmer, and Peter Sternberg. Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. *Comm. Math. Phys.*, 210(2) :413–446, 2000.
- [DR11] Monique Dauge and Nicolas Raymond. Plane waveguides with corners : small angle limit. *Preprint Irmarr*, 2011.
- [DS99] Mouez Dimassi and Johannes Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [EK87] Yuri Egorov and Vladimir Kondrat’ev. On the estimation of the number of points of the negative spectrum of the Schrödinger operator. *Mat. Sb. (N.S.)*, 134(176)(4) :556–570, 576, 1987.
- [EŠŠ89] Pavel Exner, Petr Šeba, and Pavel Šťovíček. On existence of a bound state in an L-shaped waveguide . *Czech. J. Phys.*, 39(11) :1181–1191, 1989.
- [FH06] Søren Fournais and Bernard Helffer. Accurate eigenvalue estimates for the magnetic Neumann Laplacian. *Annales Inst. Fourier*, 56(1) :1–67, 2006.
- [FH10] Søren Fournais and Bernard Helffer. *Spectral methods in surface superconductivity*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 77. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010.
- [FHP11] Søren Fournais, Bernard Helffer, and Mikael Persson. Superconductivity between  $hc_2$  and  $hc_3$ . *Journal of spectral theory*, 1(3) :27–298, 2011.
- [GP02] Tiziana Giorgi and Daniel Phillips. The breakdown of superconductivity due to strong fields for the Ginzburg-Landau model. *SIAM Rev.*, 44(2) :237–256 (electronic), 2002. Reprinted from *SIAM J. Math. Anal.* 30 (1999), no. 2, 341–359 [MR 2002b :35235].
- [Gri76] Pierre Grisvard. Smoothness of the solution of a monotonic boundary value problem for a second order elliptic equation in a general convex domain. In *Ordinary and partial differential equations (Proc. Fourth Conf., Univ. Dundee, Dundee, 1976)*, pages 135–151. Lecture Notes in Math., Vol. 564. 1976.
- [Gru72] Viktor Vasilevich Grušin. Hypoelliptic differential equations and pseudodifferential operators with operator-valued symbols. *Mat. Sb. (N.S.)*, 88(130) :504–521, 1972.
- [Har80] Evans Harrell. Double wells. *Comm. Math. Phys.*, 75(3) :239–261, 1980.
- [Hel88] Bernard Helffer. *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, volume 1336 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

- [Hel94] Bernard Helffer. On spectral theory for Schrödinger operators with magnetic potentials. In *Spectral and scattering theory and applications*, volume 23 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 113–141. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1994.
- [Hel10] Bernard Helffer. The Montgomery model revisited. *Colloq. Math.*, 118(2) :391–400, 2010.
- [HK09] Bernard Helffer and Yuri A. Kordyukov. Spectral gaps for periodic Schrödinger operators with hypersurface magnetic wells : analysis near the bottom. *J. Funct. Anal.*, 257(10) :3043–3081, 2009.
- [HK11] Bernard Helffer and Yuri A. Kordyukov. Semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator : the case of discrete wells. In *Spectral theory and geometric analysis*, volume 535 of *Contemp. Math.*, pages 55–78. 2011.
- [HM96] Bernard Helffer and Abderemane Mohamed. Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells. *J. Funct. Anal.*, 138(1) :40–81, 1996.
- [HM01] Bernard Helffer and Abderemane Morame. Magnetic bottles in connection with superconductivity. *J. Funct. Anal.*, 185(2) :604–680, 2001.
- [HM02] Bernard Helffer and Abderemane Morame. Magnetic bottles for the Neumann problem : the case of dimension 3. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 112(1) :71–84, 2002. Spectral and inverse spectral theory (Goa, 2000).
- [HM04] Bernard Helffer and Abderemane Morame. Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effects in the case of dimension 3 (general case). *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(1) :105–170, 2004.
- [Hör05] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. II. Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Differential operators with constant coefficients, Reprint of the 1983 original.
- [HP10] Bernard Helffer and Mikael Persson. Spectral properties of higher order anharmonic oscillators. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 165(1) :110–126, 2010. Problems in mathematical analysis. No. 44.
- [HS84] Bernard Helffer and Johannes Sjöstrand. Multiple wells in the semiclassical limit. I. *Comm. Partial Differential Equations*, 9(4) :337–408, 1984.
- [HS85] Bernard Helffer and Johannes Sjöstrand. Puits multiples en limite semi-classique. II. Interaction moléculaire. Symétries. Perturbation. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 42(2) :127–212, 1985.
- [HS89] Bernard Helffer and Johannes Sjöstrand. Équation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper. In *Schrödinger operators (Sønderborg, 1988)*, volume 345 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 118–197. Springer, Berlin, 1989.
- [IZ88] Mourad Ismail and Ruiming Zhang. On the Hellmann-Feynman theorem and the variation of zeros of certain special functions. *Adv. in Appl. Math.*, 9(4) :439–446, 1988.

- [Jad01a] Hala Jadallah. *The onset of superconductivity in a domain with a corner*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2001. Thesis (Ph.D.)—Indiana University.
- [Jad01b] Hala Jadallah. The onset of superconductivity in a domain with a corner. *J. Math. Phys.*, 42(9) :4101–4121, 2001.
- [Kat95] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [LP99a] Kening Lu and Xing-Bin Pan. Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. *J. Math. Phys.*, 40(6) :2647–2670, 1999.
- [LP99b] Kening Lu and Xing-Bin Pan. Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. *Phys. D*, 127(1-2) :73–104, 1999.
- [LP00a] Kening Lu and Xing-Bin Pan. Gauge invariant eigenvalue problems in  $\mathbb{R}^2$  and in  $\mathbb{R}_+^2$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(3) :1247–1276, 2000.
- [LP00b] Kening Lu and Xing-Bin Pan. Surface nucleation of superconductivity in 3-dimensions. *J. Differential Equations*, 168(2) :386–452, 2000. Special issue in celebration of Jack K. Hale’s 70th birthday, Part 2 (Atlanta, GA/Lisbon, 1998).
- [Mar89] André Martinez. Développements asymptotiques et effet tunnel dans l’approximation de Born-Oppenheimer. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 50(3) :239–257, 1989.
- [Mar10] Daniel Martin. Mélina, bibliothèque de calculs éléments finis. <http://anum-maths.univ-rennes1.fr/melina>, 2010.
- [Mat95] Hiroyuki Matsumoto. Semiclassical asymptotics of eigenvalues for Schrödinger operators with magnetic fields. *J. Funct. Anal.*, 129(1) :168–190, 1995.
- [Mon95] Richard Montgomery. Hearing the zero locus of a magnetic field. *Comm. Math. Phys.*, 168(3) :651–675, 1995.
- [MR94] Abdérémame Mohamed and George D. Raikov. On the spectral theory of the Schrödinger operator with electromagnetic potential. In *Pseudo-differential calculus and mathematical physics*, volume 5 of *Math. Top.*, pages 298–390. Akademie Verlag, Berlin, 1994.
- [MT05] Abderemane Morame and Françoise Truc. Remarks on the spectrum of the Neumann problem with magnetic field in the half-space. *J. Math. Phys.*, 46(1) :012105, 13, 2005.
- [MU96] Hiroyuki Matsumoto and Naomasa Ueki. Spectral analysis of Schrödinger operators with magnetic fields. *J. Funct. Anal.*, 140(1) :218–255, 1996.
- [Pan02] Xing-Bin Pan. Upper critical field for superconductors with edges and corners. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 14(4) :447–482, 2002.
- [Per60] Arne Persson. Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator. *Math. Scand.*, 8 :143–153, 1960.
- [PK02] Xing-Bin Pan and Keng-Huat Kwek. Schrödinger operators with non-degenerately vanishing magnetic fields in bounded domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(10) :4201–4227 (electronic), 2002.

- [PR12] Nicolas Popoff and Nicolas Raymond. Semiclassical schrödinger operator with constant magnetic field on a lens with an edge of variable opening. *En préparation*, 2012.
- [Ray09a] Nicolas Raymond. *Méthodes spectrales et théorie des cristaux liquides*. Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2009.
- [Ray09b] Nicolas Raymond. Sharp asymptotics for the Neumann Laplacian with variable magnetic field : case of dimension 2. *Ann. Henri Poincaré*, 10(1) :95–122, 2009.
- [Ray10] Nicolas Raymond. On the semi-classical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field. *Asymptotic Analysis*, 68(1-2) :1– 40, 2010.
- [RS78] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [Sch91] Michelle Schatzman. *Analyse numérique*. InterEditions, Paris, 1991. Cours et exercices pour la licence. [Course and exercises for the bachelor’s degree].
- [Sd63] Daniel Saint-James and Pierre-Gilles de Gennes. Onset of superconductivity in decreasing fields. *Physics Letters*, 7 :306–308, December 1963.
- [Sib75] Yasutaka Sibuya. *Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975. North-Holland Mathematics Studies, Vol. 18.
- [Sim83] Barry Simon. Semiclassical analysis of low lying eigenvalues. I. Nongenerate minima : asymptotic expansions. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, 38(3) :295–308, 1983.
- [Sim84] Barry Simon. Semiclassical analysis of low lying eigenvalues. II. Tunneling. *Ann. of Math. (2)*, 120(1) :89–118, 1984.
- [SJST69] Daniel Saint-James, Sarma, and John Thomas. *Type II Superconductivity*. Pergamon Press, Oxford, 1969.
- [Tru97] Françoise Truc. Semi-classical asymptotics for magnetic bottles. *Asymptot. Anal.*, 15(3-4) :385–395, 1997.
- [VL62] Marko Iosifovich Višik and Lazar Ljusternik. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 20 :239–364, 1962.
- [Wag03] Claude Wagschal. *Fonctions holomorphes, équations différentielles : exercices corrigés*. Hermann, 2003.